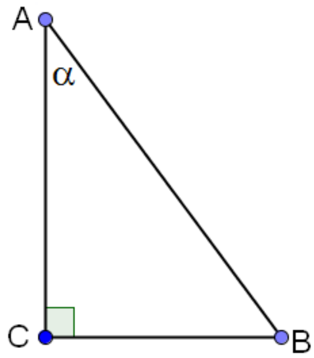
Тригонометрия: краткая справка

Определение тригонометрических функций острого угла в прямоугольном треугольнике



1. ***Синусом*** острого угла в прямоугольном треугольнике называется <u>отношение **противолежащего** катета к гипотенузе</u>

2. ***Косинусом*** острого угла в прямоугольном треугольнике называется <u>отношение **прилежащего** катета к гипотенузе</u>

3. ***Тангенсом*** острого угла в прямоугольном треугольнике называется <u>отношение **противолежащего** катета к **прилежащему** катету</u>

4. ***Котангенсом*** острого угла в прямоугольном треугольнике называется <u>отношение **прилежащего** катета к **противолежащему** катету</u>

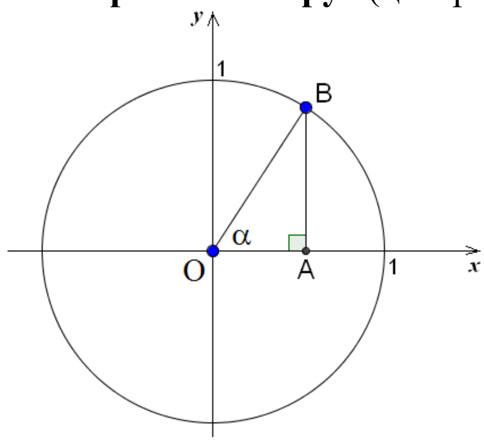
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Определение тригонометрических функций произвольного угла

Тригонометрический круг (центр – начало координат, $R = 1$)



$$\sin\alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$$

$$\sin\alpha = y$$

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$$

$$\cos\alpha = x$$

1. ***Синусом*** угла называется <u>**вторая**</u> координата точки угла на тригонометрическом круге
2. ***Косинусом*** угла называется <u>**первая**</u> координата точки угла на тригонометрическом круге
3. ***Тангенсом*** угла называется отношение синуса этого угла к косинусу этого угла

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

https://sinpix.ru

Таблица соответствия углов в градусах и радианах

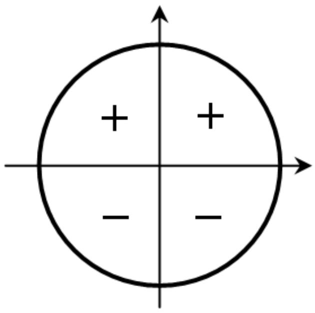
Основное соотношение: $\pi = 180^0$

Углы в градусах	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Углы в радианах	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

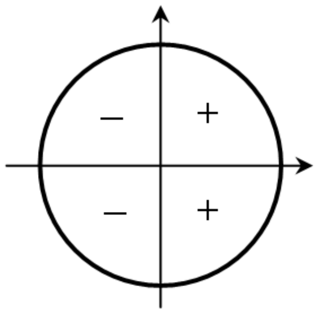
Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Градусы	$\mathbf{0^0}$	$\mathbf{30^0}$	$\mathbf{45^0}$	$\mathbf{60^0}$	$\mathbf{90^0}$	$\mathbf{180^0}$	$\mathbf{270^0}$
Радианы	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$
$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
$\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{\alpha}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

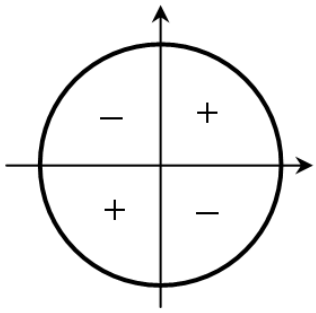
Знаки тригонометрических функций



$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$\operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\alpha$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

Основные тригонометрические тождества

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ - тригонометрическая единица

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Тригонометрические уравнения

Частные случаи

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k, k \in Z$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in Z$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$$

Основные формулы

$$\sin x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\sin x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или запись в одну строчку

$$\cos x = a, |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in Z$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z$$

Свойства арк-функций

$$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x \in [0; \pi]$$

$$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arcctg} x \in (0; \pi)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$$