

Глава 8. Дифференциальные уравнения.

8.1. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

1. Найти интегралы:

$$\int \frac{dx}{x}; \int \frac{dx}{x^2}; \int \frac{dx}{\sqrt{x}}; \int \frac{dx}{x+a}; \int \frac{dx}{2x+1}; \int \operatorname{ctg} x dx.$$

2. Пропотенцировать:

а) $\ln x = \ln 5$;

б) $\ln x = \ln 3 + 1$;

в) $\ln y = \ln x + c$;

г) $\ln y = -\ln x + c$;

д) $\ln y = x + c$.

Решить уравнения:

3. $xy' - y = 0, y(-2) = 4$;

4. $x^2 y' + y = 0$;

5. $\varphi^2 dr + (r - a)d\varphi = 0$;

6. $2y'\sqrt{x} = y, y = 1$ при $x = 4$;

7. а) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x, y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$;

б) $(x + 1)y' = 2y + 1$;

8. $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$;

9. $xy' + y = 0, y(-2) = 4$;

10. $x^2 y' + y^2 = 0, y = 1$ при $x = -1$;

11. $dr + r \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0, r = 2$ при $\varphi = \pi$;

12. $y' = 2\sqrt{y} \ln x, y(e) = 1$.

Ответы: 3. $y = Cx, y = -2x$. 4. $y = Ce^{\frac{1}{x}}$. 5. $r = Ce^{\frac{1}{\varphi}} + a$. 6. $y = Ce^{\sqrt{x}}, y = e^{\sqrt{x}-2}$.

7. а) $2y = C \sin^2 x - 1, y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$; б) $2y = C(x + 1)^2 - 1$. 8. $y = 1 + C \cdot \cos x$.

9. $xy = C, xy = -8$. 10. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C, y = -x$. 11. $r = C \cdot \cos \varphi, r = -2 \cos \varphi$.

12. $\sqrt{y} = x \ln x - x + C, \sqrt{y} = x \ln x - x + 1$.

8.2. Линейные и однородные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Найти интегралы:

а) $\int u du$; $\int \frac{dx}{x}$; $\int \frac{2udu}{1-u^2}$; $\int \frac{du}{u \ln u}$;

б) $\int \frac{dx}{x^2}$; $\int \operatorname{tg} x dx$; $\int \sin 2x dx$; $\int (\ln x + 1) dx$; $\int x e^{-x^2} dx$.

2. Определить тип дифференциального уравнения:

а) $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$;

б) $y' = y$;

в) $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$;

г) $y' + 2xy = x e^{-x^2}$;

д) $y \cdot y' = 2y - x$;

е) $xy - y = x^2 \cos x$;

ж) $x^2 y' = y^2 + xy$;

з) $xy' + y = 0$;

и) $y' \sin x - y \cos x = 1$;

к) $x^2 y' + y^2 = 0$;

л) $x^2 y' = y^2 + xy$;

м) $x + xy + y'(y + xy) = 0$.

Решить уравнения:

3. $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$, $y(1) = 1$;

4. $\frac{ds}{dt} = \frac{s}{t} - \frac{t}{s}$;

5. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;

6. $3y^2 dx = (3xy - x^2) dy$;

7. $y' - \frac{3y}{x} = x$, $y(1) = 0$;

8. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;

9. $xy' + y = \ln x + 1$;

10. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$;

11. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

12. $xyy' = y^2 + 2x^2$;

13. $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

14. $y'(2x + 1) + y = x$.

Ответы: 3. $y = x e^{\frac{C}{x}}$, $y = x$. 4. $s^2 = 2t^2 \ln \frac{C}{t}$. 5. $x^2 - y^2 = Cx$. 6. $Cy = e^{\frac{3y}{x}}$.

7. $y = Cx^3 - x^2$, $y = x^3 - x^2$. 8. $y = \frac{C - \cos 2x}{2 \cos x}$. 9. $y = \ln x + \frac{C}{x}$. 10. $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$.

11. $y^2 = Cx e^{-\frac{y}{x}}$. 12. $y^2 = 4x^2 \ln Cx$. 13. $y = x \sin x + Cx$, $y = x \sin x - x$.

14. $y = \frac{x-1}{3} + \frac{C}{\sqrt{2x+1}}$.

8.3. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решить уравнения:

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$;

2. $y'' - 4y' + 4y = 0$;

3. $y'' - 4y = 0$;

4. $y'' + 4y = 0$;

5. $y'' + 4y' = 0$;

6. $y'' - 4y = 8x^3$;

7. $y'' - 3y' + 2y = e^x$;

8. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

9. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

10. $y'' - 7y' + 6y = 0$;

11. $y'' - 2y = 0$;

12. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.

Ответы: 1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. 2. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$. 3. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

4. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. 5. $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$. 6. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$.

7. $y = C_1 e^{2x} + (C_2 - x)e^x$. 8. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}$. 9. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$,

$y = e^x + \sin x$.

10. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$.

11. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.

12. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$.