

Глава 7. Определенный интеграл.

7.1. Вычисление определенного интеграла.

Вычислить определенные интегралы:

1. а) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$; б) $\int_1^3 x^3 dx$.

2. а) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$.

Вычислить определенные интегралы путем замены переменной:

3. а) $\int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}$; б) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

4. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$. 5. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ (Подстановка: $x = \sin t$).

Вычислить определенные интегралы по частям:

6. а) $\int_0^1 xe^{2x} dx$; б) $\int_0^3 xe^{\frac{x}{3}} dx$.

7. $\int_1^e \ln x dx$. 8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 4x dx$.

Вычислить определенные интегралы:

9. $\int_0^a (x^2 - ax) dx$. 10. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

11. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$. 12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. 13. $\int_0^{\frac{\pi}{N}} \cos^2(Nx) dx$.

Ответы: 1. а) $\frac{7}{3} + \ln 2$; б) 20. 2. а) $3(e - 1)$; б) $\frac{1}{2}$. 3. а) $2 - \ln 2$;

б) $2(1 + \ln 2)$. 4. 1. 5. $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. 6. а) $\frac{e^2 + 1}{4}$; б) 9. 7. 1. 8. $-\frac{1}{8}$. 9. $-\frac{a^3}{6}$.

10. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 11. $\frac{17}{6}$. 12. $\frac{\pi}{2} - 1$.

7.2. Несобственные интегралы.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1. а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$;

б) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$;

в) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2. а) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$;

б) $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$.

3. а) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$;

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

4. а) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$;

б) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$;

в) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

5. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$.

6. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$ (подстановка $x = \frac{1}{\cos t}$).

7. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

8. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.

9. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x}$.

10. $\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{N}} dx$.

Ответы: 1. а) 1; б) расходится; в) расходится. 2. а) 1; б) $\frac{1}{2}$. 3. а) $\frac{1}{2}$;
б) расходится. 4. а) $6\sqrt[3]{2}$; б) $-\frac{3}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$. 5. 1. 6. $\frac{\pi}{6}$. 7. $\frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{3}$.
9. расходится.

7.3. Приложения определенного интеграла.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. а) $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 0$; б) $y = x^2 - 4$, $y = 0$;
в) $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$.
2. $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. 3. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
4. $y = 4 - x^2$, $y - x^2 - 2x$. 5. $y^2 = 2x + 4$, $x = 0$.

Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

6. а) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox ;
б) $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$ вокруг оси Ox .
7. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$ вокруг оси Oy .
8. Найти объем продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид:
а) $g(t) = (1 + t)e^{3t}$ за 4 года;
б) $g(t) = (3t + 2)e^{2t}$ за 2 года.
9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:
 $4x - 9y^2 = 0$, $3y - Nx = 0$.
10. Найти длину дуги кривой $y^2 = Nx^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ ($y \geq 0$).

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

11. $y = 6x - x^2$, $y = 0$. 12. $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.
13. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$. 14. $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = 4$.
15. Найти объем тела, образованного вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Ответы: 1. а) 1 кв.ед.; б) $10\frac{2}{3}$ кв.ед.; в) 2 кв. ед. 2. $17,5 - 6\ln 6$ кв.ед.

3. $\frac{8}{3}$ кв.ед. 4. 9 кв.ед. 5. $\frac{16}{3}$ кв.ед. 6. а) 12π куб.ед.; б) $\frac{\pi^2}{2}$ куб.ед.

7. $\frac{512\pi}{15}$ куб.ед. 8. а) $\approx 2,53 \cdot 10^5$ усл.ед.; б) ≈ 170 усл.ед. 11. 36 кв.ед.

12. $\frac{32}{3}$ кв.ед. 13. 12 кв.ед. 14. $\frac{14}{3} - \ln 4$ кв.ед. 15. $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$; 2π куб.ед.