

## Глава 6. Неопределенный интеграл.

### 6.1. Непосредственное интегрирование.

В следующих равенствах заполнить пропущенные места:

$$d(\ ) = 2x dx ; \quad d(\ ) = \frac{dx}{x} ; \quad d(\ ) = x^3 dx$$
$$d(\ ) = \frac{dx}{\cos^2 x} ; \quad d(\ ) = \cos x dx ; \quad d(\ ) = \frac{dx}{1+x^2} .$$

Вычислить неопределенные интегралы:

1.  $\int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx .$       2. а)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx ;$

б)  $\int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx ;$       в)  $\int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx .$

3. а)  $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3} dx ;$       б)  $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx .$

4. а)  $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx ;$       б)  $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}} dx ;$       в)  $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x^2} dx .$

5. а)  $\int a^x \left( 1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx ;$       б)  $\int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx .$       6.  $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx .$

7. а)  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx ;$       б)  $\int \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx .$

8.  $\int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx .$       9.  $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx .$

10.  $\int \frac{x-2}{x^3} dx .$       11.  $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}} dx .$       12.  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx .$

13.  $\int e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx .$       14.  $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx .$       15.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx .$

Ответы:    1.  $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C .$       2. а)  $3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C ;$

б)  $\ln|x| - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C ;$       в)  $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + C .$

3. а)  $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C ;$       б)  $\frac{x^4-1}{2x^2} - 2\ln|x| + C .$

4. a)  $\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 6\sqrt{x} - \ln|x| + C$ ; б)  $\frac{2(x+2)}{\sqrt{x}} + C$ ;
- в)  $4\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$ . 5. a)  $\frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$ ; б)  $e^x + \frac{1}{x} + C$ .
6.  $-\operatorname{ctgx} - \operatorname{tgx} + C$ . 7. a)  $\frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C$ ; б)  $x + \cos x + C$ .
8.  $2\operatorname{arctgx} - 3\operatorname{arcsin} x + C$ . 9.  $\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctgx} + C$ . 10.  $\frac{1-x}{x^2} + C$ .
11.  $\frac{3}{4}(x-4)\sqrt[3]{x} + C$ . 12.  $\frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C$ . 13.  $e^x + \operatorname{tgx} + C$ .
14.  $\cos x - \operatorname{ctgx} + C$ . 15.  $\operatorname{tgx} - x + C$ .

## 6.2. Интегрирование подстановкой.

1.  $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$ .
2.  $\int \sqrt{4x-1} dx$ .
3. а)  $\int (3-2x)^4 dx$ ;
- б)  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$ .
4.  $\int \sin(a-bx) dx$ .
5.  $\int \frac{dx}{1-10x}$ .
6. а)  $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+7} dx$ ;
- б)  $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ .
7.  $\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx$ .
8. а)  $\int \operatorname{ctg} x dx$ ;
- б)  $\int \operatorname{tg} x dx$ .
9.  $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$ .
10. а)  $\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx$ ;
- б)  $\int \frac{\cos x dx}{1+2\sin x}$ .
11.  $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$ .
12. а)  $\int \sin^2 x \cos x dx$ ;
- б)  $\int \cos^3 x \sin x dx$ .
13.  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$ .
14.  $\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx$ .
15.  $\int \sin x \cos x dx$ .
16.  $\int e^{\cos x} \sin x dx$ .
17.  $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$ .
18.  $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$ .
19.  $\int \sqrt[3]{x^3-8} \cdot x^2 dx$ .
20.  $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ .
21.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$ .
22.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}$ .
23.  $\int \sqrt{1+4\sin x} \cos x dx$ .
24.  $\int \sqrt[3]{1-6x^5} x^4 dx$ .
25.  $\int \operatorname{tg}^3(Nx) dx$ .

Ответы: 1.  $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C$ . 2.  $\frac{1}{6} (4x-1)^{\frac{3}{2}} + C$ . 3. а)  $-\frac{(3-2x)^5}{10} + C$ ;  
 б)  $-\sqrt{3-2x} + C$ . 4.  $\frac{1}{b} \cos(a-bx) + C$ . 5.  $-0,1 \cdot \ln|1-10x| + C$ .  
 6. а)  $\ln(x^2-5x+7) + C$ ; б)  $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$ . 7.  $-\frac{1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C$ .  
 8. а)  $\ln|\sin x| + C$ ; б)  $-\ln|\cos x| + C$ . 9.  $\ln|\sin 2x| + C$ .  
 10. а)  $-\frac{1}{3} \ln|1+3\cos x| + C$ ; б)  $\frac{1}{2} \ln|1+2\sin x| + C$ . 11.  $\ln|1+\ln x| + C$ .  
 12. а)  $\frac{\sin^3 x}{3} + C$ ; б)  $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$ . 13.  $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$ . 14.  $\frac{2-\cos x}{\sin x} + C$ .

15.  $\frac{\sin^2 x}{2} + C$ . 16.  $-e^{\cos x} + C$ . 17.  $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ . 18.  $2e^{\sqrt{x}} + C$ .  
19.  $\frac{\sqrt[3]{(x^3 - 8)^4}}{4} + C$ . 20.  $-\sqrt{1-x^2} + C$ . 21.  $-\sqrt{1+2\cos x} + C$ .  
22.  $\frac{2\sqrt{(1+\ln x)^3}}{3} + C$ . 23.  $\frac{(1+4\sin x)^{\frac{3}{2}}}{6} + C$ . 24.  $-\frac{1}{40}(1-6x^5)^{\frac{4}{3}} + C$ .

### 6.3. Интегрирование по частям.

1. а)  $\int x \ln x dx$ ;      б)  $\int (x^3 + 1) \ln x dx$ ;      в)  $\int \ln x dx$ .  
2. а)  $\int x \cos 3x dx$ ;      б)  $\int x \sin 2x dx$ .  
3.  $\int x e^{2x} dx$ .      4. а)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ ;      б)  $\int \arcsin x dx$ .  
5.  $\int e^x \cos x dx$ .      6.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$ .      7.  $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$ .  
8.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$ .      9.  $\int x^2 \cos x dx$ .  
10.  $\int x^2 e^{\frac{x}{2}} dx$ .      11.  $\int \operatorname{arctg} x dx$ .

- Ответы: 1. а)  $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ ; б)  $\left(\frac{x^4}{4} + x\right) \ln x - \frac{x^4}{16} - x + C$ ;  
в)  $x \ln x - x + C$ . 2. а)  $\frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C$ ; б)  $-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$ .  
3.  $\frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ .      4. а)  $\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$ ;  
б)  $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$ .      5.  $0,5 e^x (\sin x + \cos x) + C$ .  
6.  $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C$ .      7.  $-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x\right) + C$ .  
8.  $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$ .      9.  $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$ .  
10.  $-2 e^{\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8) + C$ .      11.  $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ .