

Глава 4. Введение в анализ.

4.1. Свойства пределов.

Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Найти пределы:

1. а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x + 2}{2x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
3. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9 - x^2}{\sqrt{3x} - 3}$.
4. а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$.
5. а) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$.
6. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{4-x^2}$.
7. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 - 4x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{1 - 2n}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2 + 1}$. 9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.
10. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{2n - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 1}$.
11. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - x + 14}{28 - x - 2x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^5 + 3x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$.
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$. 13. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.
14. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.
15. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^9 + 1}}{x^2 + \sqrt{x}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + b} - \sqrt{x^2 + cx + d})$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2x}{\sqrt[3]{1 + 8x^3}} + 2^{-x^2} \right)$. 17. а) $\lim_{x \rightarrow N} \frac{x^2 - N^2}{N - x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - Nx^3 + 1}{2x^3 - 3x - 7}$.

$$18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{Nx^4 + 1} + 2x^2}{3 - Nx + x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow N^3} \frac{x - N^3}{\sqrt[3]{x} - N}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 6}{x^3 + 8}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 4x + 1}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{\sqrt{3n^2 + 1}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{1 - x^2} + 2^{\frac{1}{x}} \right).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{8 - x}}.$$

Ответы: 1. а) 2; б) $-0,6$. 2. 4. 3. а) 1; б) $\frac{2}{3}$; в) -12 . 4. а) $\frac{3}{2}$; б) 1.

5. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 6. а) $\frac{1}{4}$; б) ∞ ; в) $-\frac{1}{8}$. 7. а) $\frac{2}{3}$; б) $-2,5$; в) $-\frac{3}{2}$. 8. 0.

9. ∞ . 10. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) -2 . 11. а) -2 ; б) 0; в) 3. 12. $\frac{1}{6}$. 13. $-\frac{1}{56}$. 14. а) $\frac{2}{3}$;

б) $\frac{3}{4}$. 15. а) ∞ ; б) $\frac{a-c}{2}$. 16. -1 . 19. $\frac{1}{4}$. 20. -1 . 21. 2,5. 22. $\sqrt{3}$. 23. -4 .

24. $\sqrt{5}$.

4.2. Замечательные пределы.

Найти пределы:

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}. & 2. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}. \\ 3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}. & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}. \\ 5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}; & \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 4x}{\operatorname{ctg} 5x}. & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^6}{\sin^5 x}. \\ 7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}; & \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+3}. \\ 8. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}; & \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n. \\ 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}. & 10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n. & 11. \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}. \\ 12. \lim_{x \rightarrow \infty} n(\ln(n+3) - \ln n). & 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos Nx}{x^2}. & 14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{N}{x}\right)^{Nx}. \\ 15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}. & 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}. & 17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}. & 18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}. \end{array}$$

Ответы: 1. а) 4; б) $\frac{1}{3}$. 2. 1. 3. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. 4. $6\sqrt{2}$. 5. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{4}$. 6. 0.
7. а) e ; б) e^2 ; в) e^2 . 8. а) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; б) e^4 ; в) e^{-5} . 9. e^{-2} . 10. e^{-1} . 11. e^2 .
12. 3. 15. $\frac{1}{3}$. 16. 1. 17. e^6 . 18. $\frac{1}{e^2}$.