

Глава 1. Высшая алгебра.

1.1. Определители.

Вычислить определители:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix}.$$

$$3. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$4. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$5. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$7. \text{ а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{ б) } \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix};$$

$$\text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}.$$

$$8. \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \alpha & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$9. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$10. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

$$11. \begin{vmatrix} 1 & 2 & N \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & N \end{vmatrix}.$$

Ответы: 1. 26. 2. -38. 3. 1. 4. 7. 5. -2. 6. 24. 7. а) -10; б) 4a; в) $-2b^2$. 8. 1. 9. -70. 10. 640.

1.2. Системы линейных уравнений.

Решить системы уравнений методом определителей:

$$1. \begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 4x - 5y = 40. \end{cases} \quad 2. \text{ а) } \begin{cases} ax - 3y = 1, \\ ax - 2y = 2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y - 2x = 5, \\ 4x - y + 3 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} mx - ny = (m - n)^2, \\ 2x - y = n, \text{ (при } m \neq 2n). \end{cases}$$

$$5. \text{ а) } \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2. \end{cases}$$

Решить системы уравнений матричным методом:

$$6. \text{ а) } \begin{cases} x + y + z = 6, \\ 4y + 5x + 3z = 22, \\ z + 5y + 10x - 23 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$7. \begin{cases} 2x + y - z = 5, \\ x - 2y + 2z = -5, \\ 7x + y - z = 10. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 4x + 2y + 3z = -2, \\ 8y + 2x - z = 8, \\ 9x + y + 8z = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 = 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решить систему уравнений методом определителей и матричным методом:

$$11. \begin{cases} Nx + 3y - 2z = N, \\ x - 2y = -3, \\ y - z = -1. \end{cases}$$

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$12. \begin{cases} 3x + y + 2z = 1, \\ 4x + Ny + z = 3, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Ответы: 1. (5;-4). 2. а) $\left(\frac{4}{a}; 1\right)$; б) (1;7). 3. (0;2). 4. (m ; 2m - n).

5. а) (5;6;10); б) (-1;0;1). 6. а) (1;2;3); б) (1;3;5). 7. x = 1; y = z + 3.

8. система несовместна. 9. (1;2;3;4). 10. (5;4;3;1;2).

1.3. Матрицы.

1. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Найти:

- а) $3 \cdot A$;
- б) $A + B$;
- в) $A - B$;
- г) $C = 2A + 3B$;
- д) $D = A \cdot B$;
- е) $F = B \cdot A$;
- ж) A^{-1} , сделать проверку.

2. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти:

- а) $A \cdot B$;
- б) A^{-1} , B^{-1} , сделать проверку.

3. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Найти: $A \cdot B$,

$3A + B$, B^{-1} (сделать проверку).

Ответы: 1. $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \\ 6 & 8 & 2 \\ 3 & -9 & -18 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 15 & 6 & -5 \\ 26 & -8 & -18 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. 2. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 10 & 3 & 0 \\ 5 & 13 & 0 \end{pmatrix}$,

$A^{-1} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ -15 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \\ -2 & -6 & 7 \end{pmatrix}$.

3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 12 \\ 6 & 14 & 11 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & 0,6 \\ 0,2 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}$.