

Глава 9. Ряды.

9.1. Числовые ряды.

Найти n -й член ряда по нескольким первым:

1. $\frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \dots$;

2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$;

3. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$;

4. $\frac{4}{2} + \frac{7}{4} + \frac{10}{6} + \frac{13}{8} + \dots$;

5. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \dots$;

6. $1 + \frac{2}{4} + \frac{2^2}{9} + \frac{2^3}{16} + \dots$;

7. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots$;

8. $1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$;

9. $\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots$

Выполняется ли необходимый признак сходимости для рядов:

10. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$; 11. а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$; б) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$;

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

12. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$;

13. $1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$;

14. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!}$;

Исследовать по интегральному признаку Коши сходимость ряда:

16. $1 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$; 17. $\frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \frac{1}{4 \ln^2 4} + \dots$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$;

Исследовать на абсолютную сходимость ряда:

19. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$;

20. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{3^n}$;

Исследовать сходимость ряда:

21. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots$;

22. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20n+1}{3^n}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n-1)!}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}$;

26. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$;

27. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots$

Ответы: **10.** нет. **11.** а) да; б) да. **12.** сходится. **13.** расходится. **14.** сходится. **15.** сходится. **16.** расходится. **17.** сходится. **18.** расходится. **19.** сходится не абсолютно. **20.** а) сходится абсолютно; б) сходится абсолютно. **21.** расходится. **22.** сходится. **23.** сходится. **24.** сходится. **25.** расходится. **26.** сходится не абсолютно. **27.** сходится абсолютно.

9.2. Степенные ряды

Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

1. $1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$.

5. Разложить в ряд по степеням x функции:

а) $\sin^2 x$; б) $x e^x$.

6. Разложить функцию $g(x) = x^3 - 3x$ по степеням $x - 1$.

7. Разложить x^4 по степеням $x + 1$.

Определить интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{\sqrt{(4n-3)5^{n-1}}}$; 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n-1)}}{3^{n-1} \cdot n \sqrt{n}}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$.

11. Разложить в ряд функцию $g(x) = \sin 3x$ по степеням $x + \frac{\pi}{3}$.

12. Разложить функцию $g(x) = x^4 - 4x^2$ по степеням $x + 2$.

Ответы: 1. $-3 \leq x < x$. 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 3. $-1 < x \leq 1$. 4. $R = e$.

5. а) $\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 x^4}{4!} + \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots$; б) $x e^x = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots$.

6. $x^3 - 3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. 7. $x^4 = 1 - 4(x+1) + 6(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4$

8. $-\frac{\sqrt{5}}{2} < x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. 9. $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. 10. $-0,1 \leq x < 0,1$. 11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x + \pi)^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

12. $(x+2)^4 - 8(x+2)^3 + 20(x+2)^2 - 16(x+2)$.