

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной.

5.1. Табличное дифференцирование.

1. Написать уравнения касательных к кривым и построить кривые и касательные:

а) $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$;

б) $y = \sin x$ в точке $x = \pi$.

Найти производные функций:

2. а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; б) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

3. а) $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$; б) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$; в) $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$.

4. а) $y = x^2 \cos x$; б) $y = x^3 \operatorname{ctg} x$.

5. а) $y = \frac{\sin x}{x^2}$; б) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; в) $y = \frac{2^{3x}}{3^{2x}}$.

6. а) $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$; б) $y = x \ln x$; в) $y = e^x + \arccos x$.

7. $y = \frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5 \cdot \sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7 \cdot \sqrt{x}$.

8. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$. 9. $y = \frac{1}{3\sqrt{x^3}} - 2\sqrt{x} \cdot \ln x + \frac{2-x}{3x}$.

10. $y = 2e^x - (1+x^2) \operatorname{arctg} x$. 11. $y = \ln 3 \cdot \log_3 x + \frac{2^{2x}}{\ln 4}$.

12. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

13. $y = \frac{x^N}{N} - \frac{1}{Nx^N} + \frac{2N}{\sqrt[N]{x}}$.

14. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения за час до окончания работы, если объем продукции, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением:

а) $u = -\frac{7}{12}t^3 + \frac{11}{2}t^2 + 70t + 30$;

б) $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$,

где t – рабочее время в часах ($1 \leq t \leq 8$).

Найти производные функций:

15. а) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$; б) $y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{4x^4}$; в) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

16. а) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$; б) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; в) $y = e^x \ln x$.

17. а) $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$; б) $y = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$.

18. а) $y = \frac{7^x}{\ln 7} + \ln \sqrt{2} \cdot \log_{\sqrt{2}} x + 4 \operatorname{ctgx}$; б) $y = x \arcsin x$.

19. Написать уравнения касательных к кривой $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

Ответы: 7. $x^2 \cdot \sqrt{x}(1-x^2)^2$. 8. $x^2 \cos x$. 9. $-\frac{1}{2\sqrt{x^5}} - \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3x^2}$.

12. 8,25. 14. б) 82,5; -20; -0,24. 15. а) $(x^2 - 1)^2$; б) $\frac{2x - 1}{2x^6}$;

в) $\frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)$. 16. а) $\frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{x}}$; б) $\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$;

в) $\frac{e^x}{x}(x \ln x + 1)$. 17. а) $\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$; б) $x^2 e^x$. 18. а) $7^x + \frac{1}{x} - \frac{4}{\sin^2 x}$;

б) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 19. $y = 4x$; $y = -4x + 16$.

5.2. Производная сложной функции.

Найти производные функций:

1. $y = (1 - 5x)^4$.
2. $y = \frac{1}{(1 - x^2)^5}$.
3. $y = \sqrt{\cos 4x}$.
4. а) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$; б) $y = \sin \sqrt{x}$; в) $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$.
5. $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$.
6. $y = \frac{\sqrt{2x - 1}}{x}$.
7. а) $y = \operatorname{Intg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$; б) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$.
8. а) $y = e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}$; б) $y = (e^{ax} - e^{-ax})^2$.
9. а) $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x$; б) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{6x - 1}$.
10. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \operatorname{Intg} \frac{x}{2}$.
11. $S = \sqrt{4t - t^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{t}}{2}$.
12. $y = \ln^5 \sqrt{\frac{5x - 1}{x^5 + 1}}$.
13. $y = \frac{x^N}{N \cos Nx}$.
14. $y = \frac{2}{N} \arccos \sqrt{1 - Nx}$.
15. $y = e^{-Nx} \sqrt{1 - e^{2Nx}}$.
16. $y = x \sqrt{x^2 - 1}$.
17. $S = \sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}$.
18. а) $y = a^{\sin x}$; б) $y = e^{-x^2}$; в) $y = x^2 e^{-2x}$.
19. $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1})$.
20. $y = \operatorname{arccctg} \sqrt{x^4 - 1}$.
21. а) $y = x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$; б) $y = \arccos(e^{3x})$.

Ответы: 2. $\frac{10x}{(1 - x^2)^6}$. 3. $-2 \operatorname{tg} 4x \cdot \sqrt{\cos 4x}$. 4. а) $\frac{-\sin 2x}{4 \sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$;

в) $\frac{20 \sin 4x}{(1 + \cos 4x)^6}$. 5. $\frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}$. 6. $\frac{1 - x}{x^2 \sqrt{2x - 1}}$. 7. а) $\frac{1}{\cos x}$;

б) $\operatorname{ctg} x \cdot \cos^2 x$. 8. а) $\frac{1}{a} e^{\frac{x}{a}} (\cos \frac{x}{a} - \sin \frac{x}{a})$; б) $2a(e^{2ax} - e^{-2ax})$.

9. а) $2e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$; б) $\frac{1}{2x \sqrt{6x - 1}}$. 10. $-\frac{2 \operatorname{ctg}^2 x}{\sin x}$. 11. $\sqrt{\frac{4}{t} - 1}$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{12.} \frac{-4x^5 + x^4 + 1}{(x^5 + 1)(5x - 1)} \cdot \mathbf{16.} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \mathbf{17.} \frac{\sin^2 \frac{t}{4}}{2\sqrt{\frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}}} \cdot \mathbf{18. B)} 2x(1-x)e^{-2x} \cdot \\
 & \mathbf{19.} \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \cdot \mathbf{20.} -\frac{4}{x} \cdot \mathbf{21. a)} 2\sqrt{1-x^2}; \text{б)} -\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}.
 \end{aligned}$$

5.3. Дифференциал функции.

Найти дифференциалы функций:

1. а) $y = \sqrt{1+x^2}$;

б) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

2. а) $y = \arcsin \frac{1}{x}$;

б) $y = \sin^2 t$.

3. $y = \frac{x}{2} \sqrt{49-x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}$. 4. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x-6}{x+6}$. 5. $y = x^N \ln Nx$.

Найти приближенное значение:

6. а) $\sin 31^\circ$;

б) $\cos 59^\circ$.

7. $e^{1,02}$.

8. $\sqrt{26}$.

Найти дифференциалы функций:

9. $y = 1 - \cos x$.

10. $y = \ln \sin x$.

Найти приближенное значение:

11. $\ln 0,98$.

12. $\sin 46^\circ$.

13. $\sqrt{37}$.

Ответы: 3. $\sqrt{49-x^2} dx$. 4. $\frac{dx}{x^2-36}$. 6. а) 0,5152. 7. 2,773. 8. 5,1.

10. $\operatorname{ctg} x dx$. 11. -0,02. 12. 0,7195. 13. 6,083.

5.4. Правила Лопиталья.

Найти пределы:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}. & 2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n}. & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \sin bx}. \\ 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}. & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}. & 6. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \\ 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{Nx} - Nx - 1}{\sin^2 5x}. & 8. \lim_{x \rightarrow N} \frac{\ln(x - N)}{\ln(e^x - e^N)}. & \\ 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}. & 10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}. & 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}. & 12. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}. \end{array}$$

Ответы: 1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{1}{na^{n-1}}$. 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 4. 0. 5. 0. 6. 2. 9. 3. 10. 1. 11. 3. 12. 3.

5.5. Исследование функций.

Исследовать функцию и построить ее график:

1. $y = \frac{x}{2x-1} + x$. 2. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$. 3. $y = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$.

4. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$. 5. $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.