

Глава 3. Аналитическая геометрия.

3.1. Уравнения прямой.

1. Построить прямые по их уравнению: а) $y=4$; б) $y=2x$; в) $y=2x+5$; г) $2x+y-7=0$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-1)$ перпендикулярно прямой $2x-3y=1$.
3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $N(-3;0)$ параллельно прямой $x+5y=2$.
4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;-2)$ и $B(6;1)$. Сделать чертеж.
5. Найти угол между прямыми и точку пересечения прямых $2x+y=4$ и $x+3y=7$. Сделать чертеж.
6. Даны вершины $\triangle ABC$: $A(-1;0)$, $B(3;4)$, $C(5;0)$. Записать уравнения:
 - а) стороны AB ;
 - б) высоты BD ;
 - в) медианы CM ;
 - г) прямой, проходящей через точку B параллельно AC .
7. Написать уравнения сторон и найти углы треугольника с вершинами $A(0;7)$, $B(6;-1)$, $C(2;1)$.
8. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$; найти углы и площадь треугольника.
9. Среди прямых $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ указать параллельные и перпендикулярные.
10. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;3)$ и $B(4;-2)$.
11. Найти точку пересечения прямых и угол между ними: $x+3y=0$, $x-2y+10=0$.
12. Даны вершины треугольника $A(1;4)$, $B(-3;4)$, $C(5;-2)$. Найти:
 - а) уравнения сторон;
 - б) уравнение медианы BN ;
 - в) уравнение высоты AK ;
 - г) уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно AC ;
 - д) углы $\triangle ABC$;
 - е) сделать чертеж.
13. Даны вершины треугольника: $A(N;2)$, $B(-2;-8)$, $C(2N;-2)$. Составить общее уравнение медианы AD треугольника ABC .

Ответы: 2. $3x + 2y - 4 = 0$. 3. $x + 5y + 3 = 0$. 4. $x - y - 5 = 0$.
5. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, (1;2). 6. а) $x - y + 1 = 0$; б) $x = 3$; в) $x + 2y - 5 = 0$; г) $y = 4$.
7. $\angle A = 18^\circ 26'$, $\angle B = 26^\circ 34'$, $\angle C = 135^\circ$. 8. $S = 16$. 10. $x + y - 2 = 0$.
11. (-6;2), $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. 12. а) $y = 4$, $3x + 4y - 7 = 0$, $3x + 2y - 11 = 0$;
б) $x + 2y - 5 = 0$; в) $4x - 3y + 8 = 0$; г) $3x + 2y + 1 = 0$; д) $\angle A \approx 124^\circ$,
 $\angle B \approx 36^\circ$, $\angle C \approx 20^\circ$.

3.2. Уравнения плоскости.

1. Построить плоскости:
 - а) $2x + y - z + 6 = 0$;
 - б) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$;
 - в) $3x + 2y - z = 0$;
 - г) $2z - 7 = 0$.
2. Даны точки $M_1(0; -1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярную к вектору $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}$.
3. Найти угол между плоскостями:
 - а) $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;
 - б) $x + 2z - 6 = 0$ и $x + 2y - 4 = 0$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.
5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
6. Найти расстояние от точки $(5; 1; -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.
7. Построить плоскости: а) $2x + 3y - 2z = 12$; б) $x + z = 1$.
8. Через точку $M(-1; 2; 3)$ проведена плоскость, перпендикулярная к OM . Написать ее уравнение.
9. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0; -2; 3)$. Построить плоскость.

Ответы: 2. $x + 4y - 2z = 2$. 3. а) 45^0 ; б) $78^030'$. 4. $2x - y + z = 5$.
5. $2x + 3y + 4z - 3 = 0$. 6. 3. 8. $x - 2y - 3z + 14 = 0$. 9. $3y + 2z = 0$.

3.3. Кривые второго порядка.

1. Найти координаты центра и радиус окружности:

а) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

2. Дана точка $A(-4;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA .

3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M(2; \sqrt{3})$, $B(0;2)$. Найти его эксцентриситет. Сделать чертеж.

4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; б) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$.

5. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и ее асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол между асимптотами.

6. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояния от одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

7. Составить простейшее уравнение параболы, если известно, что ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью Ox . Сделать чертеж.

8. Составить уравнение линии, для каждой точки которой расстояния до точки $F(2;0)$ и прямой $x = -3$ равны друг другу.

9. Даны точки $A(-3;0)$ и $B(3;6)$. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB .

10. Написать простейшее уравнение эллипса, у которого расстояния от одного из фокусов до концов большой оси равны 5 и 1.

11. Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что: а) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$; б) вещественная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1,2}$.

12. Написать уравнение окружности, имеющей центр в фокусе параболы $y^2 = 8x$ и касающейся ее директрисы.

13. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ и параболы

$$y^2 = \frac{9N}{2}x.$$

Ответы: 1. а) $\left(2; -\frac{5}{4}\right)$, $R = \frac{11}{4}$; б) $(4; -3)$, $R = 5$.

2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$. 3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. 5. $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $53^{\circ}08'$. 6. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (или $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$).

7. $y^2 = 4x$. 8. $y^2 = 10x + 5$. 9. $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$.

10. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (или $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$). 11. а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; б) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$.

12. $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.