

## Глава 2. Векторная алгебра.

### 2.1. Векторы и простейшие действия над ними.

1. Даны точки  $A(3;-1)$ ,  $B(-1;2)$ ,  $C(3;5)$ . Найти:
  - а) координаты векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ;
  - б) длины этих векторов;
  - в)  $2\overrightarrow{AB}$ ,  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  (аналитически);
  - г)  $2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  (геометрически и аналитически).
2. Для векторов  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$  найти:
  - а)  $\vec{a} + \vec{b}$  и  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ;
  - б) убедиться, что  $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ;
  - в)  $|\vec{a} - \vec{b}|$ ,  $2\vec{a} + 3\vec{b}$ .
3. Дан  $\triangle ABC$ :  $A(0;6)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(4;0)$ . Найти длину медианы  $AM$ .
4. Даны три последовательные вершины параллелограмма  $A(2;2)$ ,  $B(3;6)$ ,  $C(9;8)$ . Найти его четвертую вершину и определить длины его диагоналей.
5. Дано:  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$ . Доказать, что  $ABCD$  – трапеция.
6. Построить параллелограмм на векторах  $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$  и определить его диагонали.
7. Даны три последовательные вершины параллелограмма  $A(1;-2;3)$ ,  $B(3;2;1)$ ,  $C(6;4;4)$ . Найти его четвертую вершину  $D$ .

Ответы: 4.  $D(8;4)$ ,  $d_1 = \sqrt{85}$ ,  $d_2 = \sqrt{29}$ . 6.  $d_1 = \sqrt{6}$ ,  $d_2 = 3\sqrt{2}$ .

7.  $D(4;0;6)$ .

## 2.2. Скалярное произведение.

1. Даны точки  $A(3;3;-2)$ ,  $B(0;-3;4)$ ,  $C(5;2;1)$  и  $D(-2;6;-3)$ . Найти угол между  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ .

2. Определить углы  $\triangle ABC$  с вершинами  $A(2;-1;3)$ ,  $B(1;1;1)$ ,  $C(0;0;5)$ .

3. Раскрыть скобки в выражении:

$$(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2.$$

4. Даны точки  $A(a;0;0)$ ,  $B(0;0;2a)$ ,  $C(a;0;a)$ . Построить векторы  $\overrightarrow{OC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  и найти угол между ними.

5. Вычислить  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ , если  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 4$  и угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $135^\circ$ .

6. Найти угол между биссектрисами углов  $xOy$  и  $yOz$ .

7. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.

8. Определить угол между векторами  $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .

9. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$  и  $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$ .

10. Дано:  $A(1;2;0)$ ,  $B(1;5;N)$  и  $\vec{b}(2;N;-3)$ . Найти угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

Ответы: 1.  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ . 2.  $\angle B = \angle C = 45^\circ$ . 3. 2.

4.  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316$ ,  $\varphi = 71^\circ 35'$ . 5. 40. 6.  $60^\circ$ . 7.  $\arccos 0,8$ .

8.  $135^\circ$ . 9.  $90^\circ$ .

### 2.3. Векторное произведение.

1. Определить и построить вектор  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ , если  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$  и  $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ . Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .
2. Раскрыть скобки и упростить выражение:
  - а)  $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ ;
  - б)  $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$ .
3. Дано:  $A(1;-2;8)$ ,  $B(1;0;6)$ ,  $\vec{BC} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ . Найти угол между  $\vec{BC}$  и  $\vec{BA}$ , площадь  $\triangle ABC$ .
4. Построить параллелограмм на векторах  $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ , вычислить его площадь и высоту.
5. Вычислить площадь треугольника с вершинами  $A(7;3;4)$ ,  $B(1;0;6)$ ,  $C(4;5;-2)$ .
6. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  составляют угол  $45^\circ$ . Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ .
7. Построить треугольник с вершинами  $A(1;-2;8)$ ,  $B(0;0;4)$ ,  $C(6;2;0)$ . Вычислить его площадь и высоту  $BD$ .
8. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$  и  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .
9. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{b}(-2;N;-N)$  и  $\vec{c} = 2\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j}$ .

Ответы: 1.  $\vec{c} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ ,  $S = 2\sqrt{22}$ . 2. а)  $2(\vec{k} - \vec{i})$ ; б) 3.

3.  $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $S = 7\sqrt{5}$ . 4.  $S = \sqrt{21}$ ,  $h = \sqrt{4,2}$ . 5. 24,5. 6.  $50\sqrt{2}$ .

7.  $S = 7\sqrt{5}$ ,  $BD = \frac{2\sqrt{21}}{3}$ . 8.  $d_1 = d_2 = \sqrt{5}$ ,  $S = \sqrt{6}$ .

#### 2.4. Смешанное произведение.

1. Построить пирамиду с вершинами  $O(0;0;0)$ ,  $A(5;2;0)$ ,  $B(2;5;0)$ ,  $C(1;2;4)$  и вычислить ее объем, площадь грани  $ABC$  и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
2. Построить параллелепипед на векторах  $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$  и  $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ , вычислить его объем.
3. Показать, что векторы  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$  компланарны.
4. Показать, что точки  $A(2;-1;-2)$ ,  $B(1;2;1)$ ,  $C(2;3;0)$  и  $D(5;0;-6)$  лежат в одной плоскости.
5. Показать, что  $(\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot ((\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})) = 3\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .
6. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
7. Показать, что  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b}) = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .
8. Построить пирамиду с вершинами  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;3;0)$ ,  $C(0;0;6)$  и  $D(2;3;8)$ , вычислить ее объем и высоту, опущенную на грань  $ABC$ .
9. Найти смешанное произведение векторов  $\vec{a}(N;1;N)$ ,  $\vec{b}(-1;N;1)$ ,  $\vec{c}(N;-1;N)$ .
10. Определить объем параллелепипеда, построенного на векторах:  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + N\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ .

Ответы: 1.  $V = 14$ ,  $H = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ . 2.  $V = 51$ . 8.  $V = 14$ ,  $H = \sqrt{14}$ .