АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Математический факультет
Кафедра Алгебры, геометрии и МПМ

ДЕРКАЧ Д.В.

Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ

Учебно-методическое пособие

Армавир, 2010

УДК 517.1
ББК 22.18
Д 36

Печатается по решению
Ученого совета
математического факультета АГПУ
протокол №5 от 26.01.2010 г.

Р е ц е н з е н т : доцент кафедры математического анализа АГПУ, кандидат физико-математических наук Недбаев Н.М.

Деркач Д.В. Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ. Учебно-методическое пособие. – Армавир, 2010. – 44 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения, обучающихся по специальностям 080801 «Прикладная информатика в экономике», 080116 «Математические методы в экономике», изучающих дисциплины «Элементы теории игр», «Теория игр», «Математические методы и модели исследования операций».

В пособии представлены задания на расчетные работы по темам: решение матричных игр в чистых стратегиях; решение матричных игр 2х2 в смешанных стратегиях и моделирование результатов; методы решения матричных игр mxn в смешанных стратегиях; статистические игры; биматричные игры. В каждой теме имеется краткая справка и подробное решение типового примера. В конце пособия приводятся тексты заданий для решения в аудитории, а также тестовые задания, которые можно использовать для промежуточного контроля знаний, а также для разбора на практических занятиях.

Данное пособие может быть также использовано при изучении дисциплины «Исследование операций», соответствующих курсов по выбору студентами математических специальностей педагогических вузов и при изучении дисциплины «Математика» студентами экономических специальностей «Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

СОДЕРЖАНИЕ

1. Решение матричных игр в чистых стратегиях

Краткая теоретическая справка

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

Игрок – один или группа участников игры, имеющих общие для них интересы, не совпадающие с интересами других групп.

Ход – регулярное действие, совершаемое игроком.

Стратегия – набор правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры.

Для того, чтобы решить игру следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый игрок придерживается своей стратегии.

В зависимости от количества игроков определяют игры: двух игроков и n игроков.

Конечная игра – игра, в которой каждый игрок имеет конечное число возможных стратегий.

Игра с нулевой суммой – игра, в которой сумма выигрышей всех игроков в каждой ее партии равна нулю. Игра двух игроков с нулевой суммой называется антагонистической.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец – номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Платежной матрицей называется функция выигрышей матричной игры двух игроков A и B. Каждый элемент платежной матрицы a_{ij} является выигрышем игрока A (выигрыш игрока B равен $-a_{ij}$), определяемый использованием игроками стратегии A_i и B_j. Строки платежной матрицы соответствуют стратегиям игрока A, а столбцы – стратегиям игрока B. Обычно считается, что у первого игрока m стратегий, а у второго игрока n стратегий. В этом случае платежная матрица имеет размер mxn.

Запись платежной матрицы:

	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…			
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

или

$$P = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для формализации реальной конфликтной ситуации в виде матричной игры надо выделить и перенумеровать чистые стратегии каждого игрока и составить платежную матрицу.

Нижней ценой игры называется число α, определяемое по формуле: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$ (максимальный из минимальных элементов каждой строки платежной матрицы). Нижняя цена игры показывает какой минимальный выигрыш может гарантировать себе первый игрок, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях второго игрока.

Верхней ценой игры называется число β, определяемое по формуле: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$ (минимальный из максимальных элементов каждого столбца платежной матрицы). Верхняя цена игры показывает, каким числом второй игрок может ограничить выигрыш первого игрока применением своих стратегий.

Если в матричной игре нижняя и верхняя цены игры совпадают, т.е. $\alpha=\beta$, то говорят, что эта игра имеет седловую точку и имеет решение в чистых стратегиях. Общее значение верхней и нижней цен игры называется ценой игры: $\nu=\alpha=\beta$. Седловая точка – это пара чистых стратегий (A_i; B_j) при которых достигается равенство $\alpha=\beta$. Решением игры в этом случае является седловая точка – пара оптимальных стратегий игроков и соответствующая цена игры.

Для более подробного изучения материала по теме рекомендуется литература: [4, стр.5-20], [10, стр.7-25], [16, стр.25-37], [17, стр.7-21].

Решение типового примера

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 12, 8 и 4 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 1).

Таблица 1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие А	Предприятие В
1	12	8	10
2	8	5	4
3	4	2	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 10 - 0{,}6*X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия А, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия А и предприятия В. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 2).

Таблица 2

Доля продукции предприятия А, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия А, купленной населением
Предприятие А	Предприятие В	
12	12	0,31
12	8	0,33
12	4	0,18
8	12	0,7
8	8	0,3
8	4	0,2
4	12	0,92
4	8	0,85
4	4	0,72

В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение

Одной из главных задач каждого предприятия является максимизация прибыли от реализации продукции. Но в данном случае более важной проблемой является конкурентная борьба. В конкурентном конфликте выигрыш будет определяться не размером прибыли каждого предприятия, а разностью их прибылей. При таком подходе конфликт можно рассматривать как матричную игру двух игроков с нулевой суммой, т.к. выигрыш одного предприятия равен проигрышу другого.

Формализуем конфликтную ситуацию – составим платежную матрицу. Для этого определим стратегии каждого игрока:

A_1 – предприятие А выбирает технологию 1

A_2 – предприятие А выбирает технологию 2

A_3 – предприятие А выбирает технологию 3

B_1 – предприятие В выбирает технологию 1

B_2 – предприятие В выбирает технологию 2

B_3 – предприятие В выбирает технологию 3

Элементами платежной матрицы будет разность прибыли предприятия А и предприятия В.

Найдем a_{11} (выбраны стратегии A_1 и B_1 – оба предприятия реализуют продукцию по 12 д.е.)

Прибыль = Доход – Затраты

И доход и затраты зависят от количества купленной населением продукции, которое определяется функцией спроса Y = 10 – 0,6*X.

Средняя цена на продукцию равна: X = (12 +12)/2 = 12.

Значит, Y = 10 – 0,6 * 12 = 10 – 7,2 = 2,8 (тыс. ед.)

Из таблицы 2 следует, что у предприятия А купят 31% от всей купленной населением продукции:

2,8 тыс. ед. * 31% =2800 ед. * 0,31 = 868 ед.

Тогда у предприятия В купят 69% от всей купленной населением продукции:

2,8 тыс. ед. * 69% =2800 ед. * 0,69 = 1932 ед.

или 2800 – 868 = 1932 (ед.)

Значит:

Прибыль А = 868 * 12 – 868 * 8 = 868 * (12 – 8) = 868 * 4 = 3472 д.е.

Прибыль В = 1932 * (12 – 10) = 1932 * 2 = 3864 д.е.

a_{11} = 3472 – 3864 = – 392 (ед.) = – 0,392 (тыс.ед.)

Можно использовать следующую формулу для расчета элементов платежной матрицы:

$a_{ij} = (10 – 0,3 * (p_1 + p_2)) * 1000 * (d * (p_1 – s_1) – (1 – d) * (p_2 – s_2))$,

где p_1 – стоимость реализации единицы продукции предприятием А при выборе им стратегии A_i;

p_2 – стоимость реализации единицы продукции предприятием В при выборе им стратегии B_j;

s_1 – себестоимость единицы продукции предприятия А при выборе им стратегии A_i;

s_2 – себестоимость единицы продукции предприятия В при выборе им стратегии B_j;

d – доля продукции предприятия А, купленной населением при ценах p_1 и p_2.

Проведя все расчеты, получаем платежную матрицу (в тыс. ед.):

	B_1	**B_2**	**B_3**
A_1	-0,392	-5,44	-9,048
A_2	6	-9,88	-11,52
A_3	8,736	7,04	4,56

1. Проверим наличие ситуации равновесия – седловой точки. Для это найдем нижнюю и верхнюю цены игры.

В каждой строчке определим минимальный элемент и запишем его в новом столбце, а из найденных минимальных выберем максимальный: α = 4,56 – нижняя цена игры. В каждом столбце найдем максимальный элемент и запишем их в новой строке и из них выберем минимальный β = 4,56 – верхняя цена игры.

	B_1	**B_2**	**B_3**	**Мин**
A_1	-0,392	-5,44	-9,048	-9,048
A_2	6	-9,88	-11,52	-11,52
A_3	8,736	7,04	4,56	4,56
Макс	8,736	7,04	4,56	

Так как $\alpha = \beta$ = 4,56, то в конфликтной ситуации есть точка равновесия – седловая точка, которую образуют стратегии (A_3, B_3).

Если одно предприятие будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то самое лучшее поведение второго предприятия – также придерживаться своей оптимальной стратегии. В приложении к условию это означает, что предприятиям необходимо использовать свои третьи технологии и минимальные цены реализации.

2. Определим наличие заведомо невыгодных стратегий у предприятий.

Так как элементы третьей строки больше соответствующих элементов первой строки и второй строки, то стратегии A_1 и A_2 – заведомо невыгодные, так как предприятие А стремится максимизировать разницу прибылей.

Аналогично для предприятия В. Все элементы третьего столбца меньше соответствующих элементов первого и второго столбцов, значит стратегии B_1 и B_2 – заведомо невыгодные (доминируемые).

3. В ситуации равновесия будет реализовано 7600 единиц продукции ($Y = 10 – 0,6 * (4 + 4)/2 = 7,6$). У первого предприятия купят 5472 ед. продукции, а у второго 2128 ед. продукции. В выигрышном положении будет предприятие А.

Задание на самостоятельную работу

Две компании, занимающиеся производством антивирусного программного обеспечения, практически полностью делят рынок некоторого региона. Разрабатывая новую версию программного продукта для мобильных телефонов, каждая из компаний может использовать один из четырех вариантов продвижения нового программного продукта на рынок, который влияет на конечную стоимость продукции.

В зависимости от сделанного выбора компании могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 25, 22, 19 и 16 условных единиц соответственно. Соотношение цен реализации и себестоимость представлены в таблице:

Вариант продвижения нового продукта	Цена реализации единицы продукции, у.е.	Полная себестоимость единицы продукции, у.е.	
		Компания А	Компания В
1	25	17	21 – 0,1*N
2	22	15	10 + 0,1*N
3	19	10 + 0,1*N	10
4	16	5 + 0,1*N	5

N – номер варианта, предложенный преподавателем.

В результате маркетингового исследования рынка была определена функция спроса на программные продукты:

$$Y = 20 – 0,5*X,$$

где Y – количество продукции, которое будет реализовано в регионе (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции компаний, у.е.

Значения долей продукции, реализованной компанией А, зависят от соотношения цен на продукцию компании А и компании В. Маркетинговое исследование позволило установить эту зависимость:

Цена реализации 1 ед. продукции, у.е.		Доля реализованной продукции компании А
Компания А	Компания В	
25	25	0,31
25	22	0,33
25	19	0,25
25	16	0,2
22	25	0,4
22	22	0,35

Цена реализации 1 ед. продукции, у.е.		Доля реализованной продукции компании А
Компания А	Компания В	
22	19	0,32
22	16	0,28
19	25	0,52
19	22	0,48
19	19	0,4
19	16	0,35
16	25	0,6
16	22	0,58
16	19	0,55
16	16	0,5

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе варианта продвижения продукта на рынок обоими компаниями?

2. Существуют ли варианты, которые компании заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какая компания получит больше прибыль в ситуации равновесия? Какая компания будет иметь большую долю рынка в ситуации равновесия? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

2. Решение матричных игр 2x2 в смешанных стратегиях и моделирование результатов

Краткая теоретическая справка

Если матричная игра не имеет седловой точки, то решение находят в смешанных стратегиях.

Смешанной стратегией игрока называется вектор $X(p_1, p_2, \dots, p_m)$, координатами которого являются вероятности (относительные частоты) использования игроком своих чистых стратегий. Так как события, заключающиеся в выборе игроком своих чистых стратегий образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна 1, т.е.:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

Рассмотрим матричную игру 2x2, которая задана платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если эта игра не имеет седловой точки, то ее решение составляет пара оптимальных стратегий $X^*(p_1, p_2)$ и $Y^*(q_1, q_2)$. Причем использование игроком А своей оптимальной стратегии гарантирует ему получение среднего выигрыша не меньшего, чем цена игры ν. При этом, если игрок В использует свою оптимальную стратегию, то средний выигрыш игрока будет равен ν, если игрок В не использует свою оптимальную стратегию, то средний выигрыш игрока А будет больше ν.

Записанное выше положение имеет вероятностный смысл, т.е. средний выигрыш будет тем ближе к ν, чем больше партий сыграют игроки: средний выигрыш стремится к ν по вероятности (другими словами, средний выигрыш будет не точно равен ν, а примерно равен и чем больше партий, тем меньше отклонение). Кроме того, определение смешанной стратегии требует выбирать чистые стратегии игроками случайно в соответствии с вероятностями (относительными частотами) их использования (условие секретности выбора чистой стратегии).

Для решения матричных игр 2х2 можно использовать *аналитический* и *геометрический* методы.

Аналитический метод решения игры 2х2.

Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию игрока А: $X^*(p_1, p_2)$ и соответствующую цену игры ν, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Первое уравнение определяет математическое ожидание выигрыша игрока А при использовании им стратегии $X^*(p_1, p_2)$ против стратегии B_1; второе уравнение определяет математическое ожидание выигрыша игрока А при использовании им стратегии $X^*(p_1, p_2)$ против стратегии B_2; третье уравнение – свойство компонентов смешанной стратегии игрока.

Аналогично для игрока В. Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию игрока В: $Y^*(q_1, q_2)$ и соответствующую цену игры ν, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu, \\ q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Цена игры ν общая для обоих игроков, поэтому при решении систем уравнений (1) и (2) должно получиться одинаковое значение ν.

Геометрический метод решения игры 2х2.

В точках $x = 0$, $x = 1$ оси Оx восстановим перпендикуляры и обозначим их A_1 и A_2 – в соответствии со стратегиями игрока А (см. рис 1).

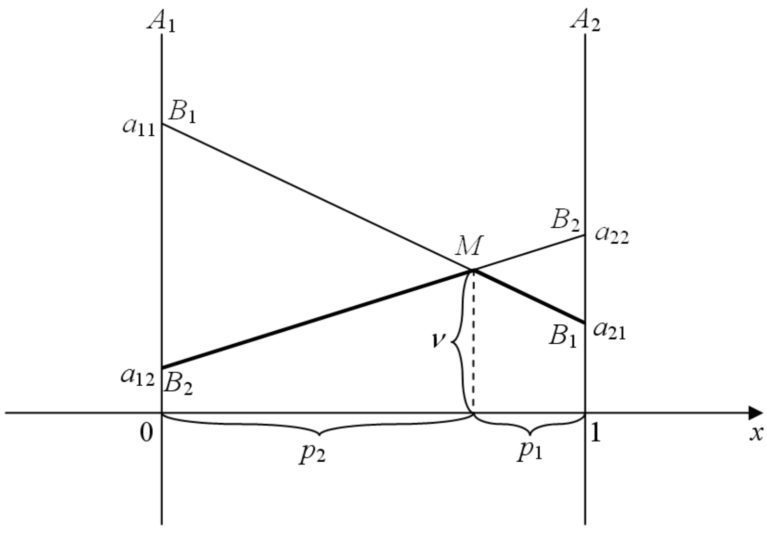


Рис. 1. Графическая интерпретация матричной игры 2х2 для игрока А.

Изобразим стратегию B_1. На прямой A_1 отложим a_{11}, а на прямой A_2 отложим a_{21}. Соединим эти точки и получим прямую B_1B_1 (см. рис. 1). Аналогично изобразим стратегию B_2, отложив на прямой A_1 значение a_{12}, а на прямой A_2 значение a_{22}.

Каждой точке на отрезке [0; 1] соответствует смешанная стратегия игрока А, причем p_2 – расстояние от этой точки до нуля, а p_1 – расстояние от этой точки до точки 1 (см. рис. 1).

Ломанная B_2MB_1 (на рисунке 1 выделена полужирно) определяет минимальные возможные средние выигрыши игрока А при использовании им своих смешанных стратегий. Точка М (самая высокая точка ломанной) – определяет наилучший средний выигрыш игрока А из всех минимальных. Она соответствует оптимальной смешанной стратегии игрока А. При этом:

$$\text{если } M(x, y), \text{ то } p_1 = 1 - x,\ p_2 = x,\ \nu = y.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению координат точки М, которая является точкой пересечения прямых B_1B_1 и B_2B_2. Для нахождения уравнений прямых B_1B_1 и B_2B_2.можно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_2},$$

с учетом того, что прямую B_1B_1 определяют точки $B_1(0; a_{11})$, $B_1(1; a_{21})$, а прямую B_2B_2 определяют точки $B_2(0; a_{12})$, $B_2(1; a_{22})$.

Для игрока В оптимальная смешанная стратегия находится аналогично, но точка М определяется не самой высокой точкой нижней ломанной, а самой низкой точкой высокой ломанной – полужирная ломанная на рисунке 2.

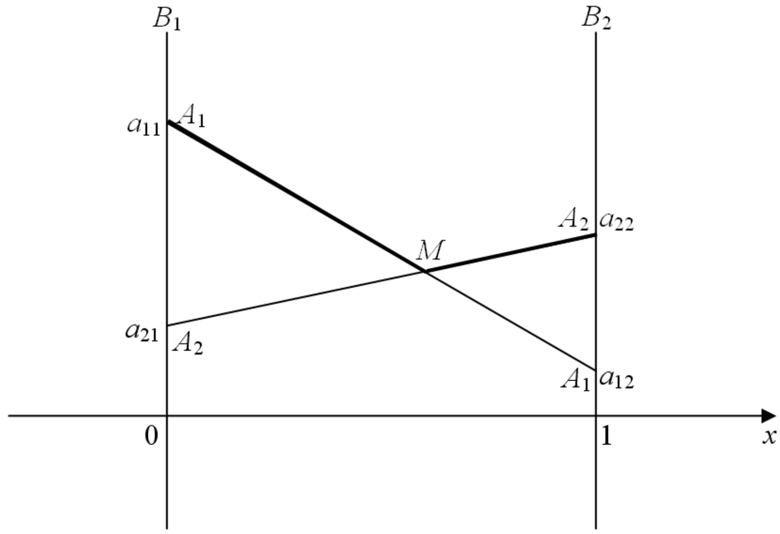


Рис. 2. Графическая интерпретация матричной игры 2х2 для игрока В.

Найдя координаты точки М (x, y), как точки пересечения прямых A_1A_1 и A_2A_2, компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока В и цену игры: $Y^*(q1, q2)$, ν можно найти по следующим формулам:

$$q_1 = 1 - x,\ q_2 = x,\ \nu = y.$$

Для более подробного изучения материала по теме рекомендуется литература: [4, стр.23-43], [10, стр.42-55], [17, стр.35-36].

Решение типового примера

Матричную игру 2x2 решить в смешанных стратегиях:

1) аналитически (для игрока А); геометрически (для игрока В)

2) провести моделирование результатов игры с помощью таблицы равномерно распределенных случайных чисел, разыграв 30 партий; определить относительные частоты использования чистых стратегий каждым игроком и средний выигрыш, сравнив результаты с полученными теоретически в п.1.

Игра задана платежной матрицей: $P = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение:

1. Найдем аналитически оптимальную стратегию игрока А и соответствующую цену игры $X^*(p_1, p_2)$, ν.

Так как X^* – оптимальная, то она должна гарантировать средний выигрыш игроку А, равный цене игры при любом поведении игрока В:

для стратегии B_1: $10p_1 + 8p_2 = \nu$;

для стратегии B_2: $7p_1 + 11p_2 = \nu$.

С учетом того, что сумма компонентов смешанной стратегии равна 1, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 10p_1 + 8p_2 = \nu, \\ 7p_1 + 11p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе: $3p_1 - 3p_2 = 0$ или $p_1 = p_2$. Значит:

$$\begin{cases} p_1 = p_2, \\ p_1 + p_2 = 1, \\ 7p_1 + 11p_2 = \nu, \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2}, \\ p_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \nu = 7 \cdot \dfrac{1}{2} + 11 \cdot \dfrac{1}{2} = 9. \end{cases}$$

Итак: $X^*\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$, $\nu = 9$.

Найдем геометрически оптимальную смешанную стратегию игрока В: $Y^*(q_1, q_2)$.

Стратегию A_1 изобразим точками с ординатами 10 и 7 на прямых B_1 и B_2 соответственно. Стратегию A_2 – точками с ординатами 8 и 11 (см. рис. 1).

Каждой точке на отрезке [0; 1] соответствует смешанная стратегия игрока В. Среди них оптимальной будет та, которая определяется самой низкой точкой ломанной A_1MA_2, т.е. точкой М. Для нахождения компонентов оптимальной стратегии игрока В надо найти координаты точки М, причем если М (x, y), то $q_1 = 1 - x$, $q_2 = x$, $\nu = y$. Для этого найдем уравнения прямых A_1A_1 и A_2A_2, воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Так как $A_1(0; 10)$ и $A_1(1; 7)$, то

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-10}{7-10},\ x=\frac{y-10}{-3},\ -3x=y-10,\ 3x+y-10=0.$$

Т.е. уравнение прямой A_1A_1 имеет вид: $3x+y-10=0$.

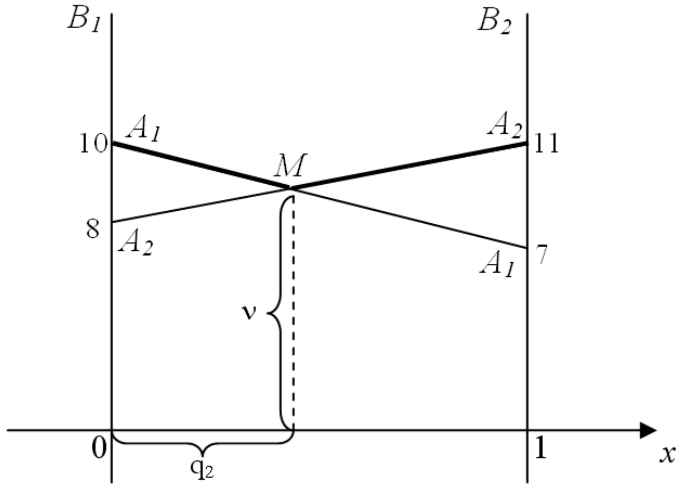


Рис. 3. Геометрическая интерпретация матричной игры для игрока В

Так как $A_2(0; 8)$ и $A_2(1; 11)$, то

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-8}{11-8},\ x=\frac{y-8}{3},\ 3x=y-8,\ 3x-y+8=0.$$

Т.е. уравнение прямой A_2A_2 имеет вид: $3x-y+8=0$.

Найдем координаты точки M, решив систему уравнений прямых A_1A_1 и A_2A_2:

$$\begin{cases}3x+y-10=0,\\3x-y+8=0,\end{cases}\ \begin{cases}2y=18,\\3x-y+8=0,\end{cases}\ \begin{cases}x=\dfrac{1}{3},\\y=9.\end{cases}$$

Итак, $M\left(\frac{1}{3}; 9\right)$, значит ν = 9, $Y^*\left(1-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ или $Y^*\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ответ: $X^*\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $Y^*\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, ν = 9.

2. Проведем моделирование результатов решения с помощью таблицы равномерно распределенных случайных чисел (см. приложение). Для 30 партий хватит 60 чисел, на основе которых будут выбираться стратегии игроками. Используемые случайные числа сгенерированы в MS Excel функцией =СЛЧИС(). В приложении достаточно много чисел, но использовать для моделирования можно любые 60, выбранные произвольно с любого места таблицы. Мы возьмем числа из первого блока (для игрока А используется 1, 3 и 5 столбики).

Будем выбирать стратегии игроков, используя геометрическое определение вероятности. Так как все случайные числа из отрезка [0; 1], то чтобы стратегия A_1 появлялась примерно в половине случаев, будем ее выбирать если случайное число меньше 0,5; в остальных случаях выбирается стратегия A_2. Аналогично для игрока В. Стратегию B_1

будем выбирать, если соответствующее случайное число меньше $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$, в противном случае выбираем стратегию B_1.

Заполним расчетную таблицу:

Номер партии	Случайное число игрока А	Стратегия игрока А **(А1: < 0,5)**	Случайное число игрока В	Стратегия игрока В **(В1: < 0,667)**	Выигрыш А	Накопленный выигрыш А	Средний выигрыш А (цена игры)
1.	0,029	A1	0,125	B1	10	10	10,000
2.	0,611	A2	0,490	B1	8	18	9,000
3.	0,766	A2	0,958	B2	11	29	9,667
4.	0,738	A2	0,564	B1	8	37	9,250
5.	0,944	A2	0,257	B1	8	45	9,000
6.	0,416	A1	0,886	B2	7	52	8,667
7.	0,513	A1	0,226	B1	10	62	8,857
8.	0,717	A2	0,467	B1	8	70	8,750
9.	0,994	A2	0,822	B2	11	81	9,000
10.	0,412	A1	0,244	B1	10	91	9,100
11.	0,259	A1	0,176	B1	10	101	9,182
12.	0,610	A2	0,658	B1	8	109	9,083
13.	0,207	A1	0,451	B1	10	119	9,154
14.	0,071	A1	0,994	B2	7	126	9,000
15.	0,391	A1	0,724	B2	7	133	8,867
16.	0,835	A2	0,469	B1	11	144	9,000
17.	0,062	A1	0,392	B1	10	154	9,059
18.	0,181	A1	0,457	B1	10	164	9,111
19.	0,891	A2	0,336	B1	8	172	9,053
20.	0,375	A1	0,094	B1	10	182	9,100
21.	0,009	A1	0,522	B1	10	192	9,143
22.	0,255	A1	0,806	B2	7	199	9,045
23.	0,273	A1	0,562	B1	10	209	9,087
24.	0,111	A1	0,805	B2	7	216	9,000
25.	0,888	A2	0,037	B1	8	224	8,960
26.	0,392	A1	0,341	B1	10	234	9,000
27.	0,843	A2	0,808	B2	11	245	9,074
28.	0,086	A1	0,585	B1	10	255	9,107
29.	0,426	A1	0,370	B1	10	265	9,138
30.	0,562	A2	0,688	B2	11	276	9,200

Таким образом, в результате моделирования в 30 партиях цена игры (средний выигрыш) равен 9,2. Этот результат согласуется с теоретической ценой игры 9.

Частоты использования игроками своих чистых стратегий соответственно равны:

X(18/30;12/30), Y(21/30; 9/30) или

X(0,6; 0,4), Y(0,7; 0,3)

Сравнивая с теоретическими оптимальными стратегиями X*(0,5; 0,5) и Y*(0,67; 0,33) можно сделать вывод, что результаты моделирования достаточно близко им соответствуют даже для небольшого количества партий.

Задание на самостоятельную работу

Матричную игру 2x2 решить в смешанных стратегиях:

1) аналитически (для игрока А); геометрически (для игрока В)

2) провести моделирование результатов игры с помощью таблицы равномерно распределенных случайных чисел, разыграв 30 партий; определить относительные частоты использования чистых стратегий каждым игроком и средний выигрыш, сравнив результаты с полученными теоретически в п.1.

Вариант 1 $\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}$	Вариант 2 $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$	Вариант 3 $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}$	Вариант 4 $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 18 & 7 \end{vmatrix}$	Вариант 5 $\begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$
Вариант 6 $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 18 & 5 \end{vmatrix}$	Вариант 7 $\begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$	Вариант 8 $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$	Вариант 9 $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$	Вариант 10 $\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 19 & 8 \end{vmatrix}$
Вариант 11 $\begin{vmatrix} 14 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$	Вариант 12 $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 19 & 6 \end{vmatrix}$	Вариант 13 $\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}$	Вариант 14 $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$	Вариант 15 $\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 16 \end{vmatrix}$
Вариант 16 $\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 20 & 9 \end{vmatrix}$	Вариант 17 $\begin{vmatrix} 15 & 7 \\ 9 & 10 \end{vmatrix}$	Вариант 18 $\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 20 & 7 \end{vmatrix}$	Вариант 19 $\begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}$	Вариант 20 $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$
Вариант 21 $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 17 \end{vmatrix}$	Вариант 22 $\begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 21 & 10 \end{vmatrix}$	Вариант 23 $\begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}$	Вариант 24 $\begin{vmatrix} 9 & 13 \\ 21 & 8 \end{vmatrix}$	Вариант 25 $\begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 12 & 8 \end{vmatrix}$
Вариант 26 $\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$	Вариант 27 $\begin{vmatrix} 11 & 6 \\ 9 & 18 \end{vmatrix}$	Вариант 28 $\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 22 & 11 \end{vmatrix}$	Вариант 29 $\begin{vmatrix} 17 & 9 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$	Вариант 30 $\begin{vmatrix} 10 & 14 \\ 22 & 9 \end{vmatrix}$

3. Методы решения матричных игр mxn в смешанных стратегиях

Краткая теоретическая справка

Матричная игра в общем виде решается как задача линейного программирования симплексным методом. Обязательным условием применения симплексного метода является наличие условия неотрицательности переменных, поэтому один из способов сведения матричной игры к задаче линейного программирования подразумевает $\nu > 0$ (цена игры – положительная). Это условие соблюдается, если все элементы платежной матрицы положительны. Добиться этого можно с помощью следующей теоремы.

Теорема. Пусть дана матричная игра Γ с матрицей $P = (a_{ij})$ и ценой игры ν. Тогда оптимальные смешанные стратегии игроков матричной игры Γ' с матрицей $P' = (b \cdot a_{ij} + c)$, где $b > 0$ совпадает с оптимальными смешанными стратегиями соответствующих игроков в матричной игре Γ, а цена игры Γ' равна: $\nu' = b \cdot \nu + c$.

На практике можно пользоваться следующим алгоритмом, который рассмотрим на примере игры 3х3, которая задана платежной матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры: $X^*(p_1, p_2, p_3)$, $Y^*(q_1, q_2, q_3)$, ν.

1) Преобразуем платежную матрицу: увеличим все ее элементы на число γ:

$\gamma = \left| \min\limits_{i,j} a_{ij} \right| + 1$ – модуль минимального элемента матрицы, увеличенный на единицу;

$$P' = \begin{pmatrix} a_{11}+\gamma & a_{12}+\gamma & a_{13}+\gamma \\ a_{21}+\gamma & a_{22}+\gamma & a_{23}+\gamma \\ a_{31}+\gamma & a_{32}+\gamma & a_{33}+\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Если все элементы платежной матрицы положительны, то можно считать $\gamma = 0$ и решать задачу линейного программирования для исходной платежной матрицы.

2) Записать задачу линейного программирования для игрока А:

Найти значения переменных x_1, x_2, x_3, при которых функция $z_A = x_1 + x_2 + x_3$ достигает *минимального* значения и удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + b_{31}x_3 \ge 1, \\ b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + b_{32}x_3 \ge 1, \\ b_{13}x_1 + b_{23}x_2 + b_{33}x_3 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

3) Решить записанную задачу симплексным методом и перейти от ее решения к решению матричной игры для игрока А:

$$p_1 = \frac{x_1}{z_A},\ p_2 = \frac{x_2}{z_A},\ p_3 = \frac{x_3}{z_A},\ \nu = \frac{1}{z_A} - \gamma.$$

4) Записать задачу линейного программирования для игрока В:

Найти значения переменных y_1, y_2, y_3, при которых функция $z_B = y_1 + y_2 + y_3$ достигает *максимального* значения и удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \le 1, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \le 1, \\ b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3 \le 1, \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0. \end{cases}$$

3) Решить записанную задачу симплексным методом и перейти от ее решения к решению матричной игры для игрока А:

$$q_1 = \frac{y_1}{z_B},\ q_2 = \frac{y_2}{z_B},\ q_3 = \frac{y_3}{z_B}.$$

Цена игры является общей для обоих игроков (выполнение этого условия является элементом проверки правильности решения).

В решении типового примера подробно рассмотрен ход рассуждений, приводящий к задаче линейного программирования, хотя на практике можно пользоваться приведенными здесь готовыми соотношениями.

Для более подробного изучения материала по теме рекомендуется литература: [4, стр.43-58], [10, стр.55-67], [17, стр.32-56].

Решение типового примера

Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 3 объекта. Стратегии отраслей: *i*-я стратегия состоит в финансировании *i*-го объекта (i = 1, 2, 3). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли - представленная игра может рассматриваться как игра двух игроков с нулевой суммой.

1. Решим матричную игру в MS Excel, записав ее как задачу линейного программирования

Рассмотрим игрока А. Будем искать оптимальную смешанную стратегию игрока А: $X^*(p_1, p_2, p_3)$, где p_i – частота (вероятность) использования игроком А своей *i*-стратегии ($i = 1,2,3$).Обозначим цену игры (средний выигрыш) $-\nu$.

Чтобы свести матричную игру для игрока А к задаче линейного программирования преобразуем платежную матрицу так, чтобы все ее элементы были больше нуля – прибавим ко всем элементам матрицы число 4. Получаем преобразованную платежную матрицу:

$$B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 10\\ 9 & 6 & 1\\ 2 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

Средний выигрыш A должен быть не меньше цены игры ν при любом поведении игрока B. Так, если игрок B использует свою первую стратегию, то средний выигрыш игрока A составит: $3p_1+9p_2+2p_3$, получаем неравенство $3p_1+9p_2+2p_3\ge\nu$. Аналогично, записав неравенства для стратегий B_2 и B_3, получаем систему линейных ограничений:

$$\begin{cases}3p_1+9p_2+2p_3\ge\nu\\ 5p_1+6p_2+8p_3\ge\nu\\ 10p_1+p_2+9p_3\ge\nu\end{cases}$$

Из условия $p_1+p_2+p_3=1$, разделив обе части уравнения на $\nu>0$ (цена игры больше нуля, т.к. все элементы преобразованной матрицы больше нуля), получаем целевую функцию $Z=\frac{p_1}{\nu}+\frac{p_2}{\nu}+\frac{p_3}{\nu}=\frac{1}{\nu}$. Цель игрока A – получить максимальный средний выигрыш, т.е. $\nu\to\max$, а значит $\frac{1}{\nu}\to\min$. Если обозначить $\frac{p_i}{\nu}=x_i$ (i=1, 2, 3), то целевая функция $Z=x_1+x_2+x_3\to\min$.

Перейдем в системе ограничений к переменным x_i, разделив каждое неравенство на $\nu>0$:

$$\begin{cases}3x_1+9x_2+2x_3\ge1\\ 5x_1+6x_2+8x_3\ge1\\ 10x_1+x_2+9x_3\ge1\end{cases}$$

Таким образом, для нахождения оптимальной стратегии игрока A необходимо решить задачу линейного программирования:

найти значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих системе ограничений

$$\begin{cases}3x_1+9x_2+2x_3\ge1\\ 5x_1+6x_2+8x_3\ge1\\ 10x_1+x_2+9x_3\ge1\end{cases};$$

и условию $x_1\ge0, x_2\ge0, x_3\ge0$, при котором функция $Z=x_1+x_2+x_3$ принимает минимальное значение.

Решим задачу средствами табличного редактора MS Excel.

1. Оформим расчетную таблицу, как показано на рисунке 4:
– ячейки B2, B3, B4 играют роль переменных x_1, x_2, x_3;
– в ячейке B8 вычисляется значение целевой функции;
– в ячейках B12, B13, B14 вычисляются левые части ограничений.

2. В меню СЕРВИС выбираем команду ПОИСК РЕШЕНИЯ (если нет такого пункта меню, то сначала необходимо в меню СЕРВИС выбрать команду НАДСТРОЙКИ, в появившемся диалоговом окне установить флажок на пункте ПОИСК РЕШЕНИЯ и нажать кнопку ОК; теперь в меню СЕРВИС будет команда ПОИСК РЕШЕНИЯ).

	A	B	C
1	Переменные		
2	x1=		
3	x2=		
4	x3=		
5			
6			
7	Целевая функция		
8	Z=	=B2+B3+B4	
9			
10	Система ограничений		
11		левая часть	правая часть
12		=3*B2+9*B3+2*B4	1
13		=5*B2+6*B3+8*B4	1
14		=10*B2+B3+9*B4	1

Рис. 4. Пример оформления решения матричной игры в MS Excel

3. В окне ПОИСК РЕШЕНИЯ введем необходимые параметры (см. рис. 5):

– укажем целевую ячейку (B8) – та, в которой вычисляется значение целевой функции;

– выберем переключатель МИНИМАЛЬНОМУ ЗНАЧЕНИЮ (целевую функцию необходимо минимизировать);

– в поле ИЗМЕНЯЯ ЯЧЕЙКИ укажем диапазон, который играет роль переменных, т.е. B2:B4;

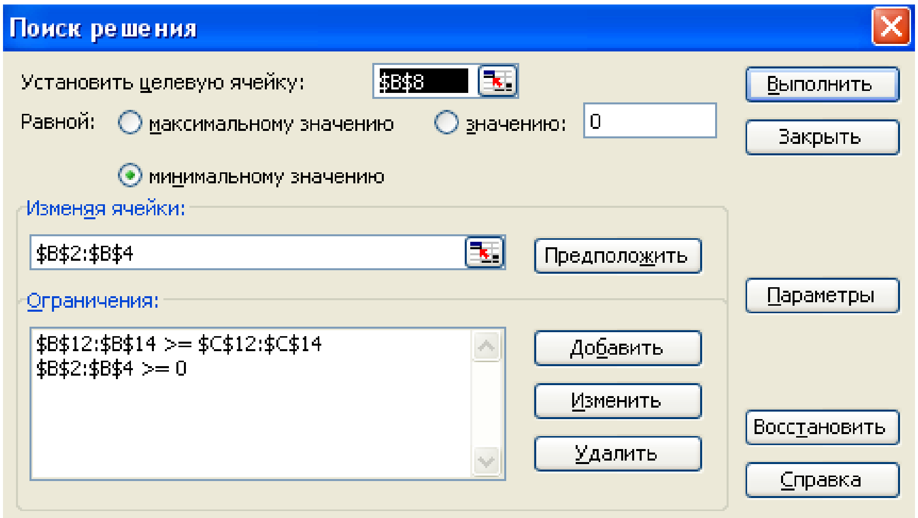


Рис. 5. Ввод параметров в окне ПОИСК РЕШЕНИЯ

– введем систему ограничений с помощью, нажав кнопку ДОБАВИТЬ. При этом появится диалоговое окно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ (см. рис.).

Первое ограничений:

⇒ в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ вводим диапазон, где вычислены левые части неравенств из системы ограничений задачи (все три неравенства можно ввести сразу, так как они одного смысла – больше или равно) – B12:B14;

⇒ в открывающемся списке выбираем знак неравенства;

⇒ в поле ОГРАНИЧЕНИЕ указываем диапазон, где хранятся правые части неравенств системы ограничений задачи – C12:C14;

⇒ нажимаем кнопку ДОБАВИТЬ (при этом окно не исчезнет и можно будет ввести новое ограничение).

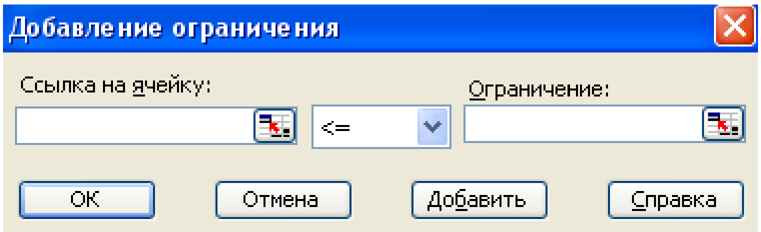


Рис. 6. Окно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Второе ограничение (условие неотрицательности переменных):

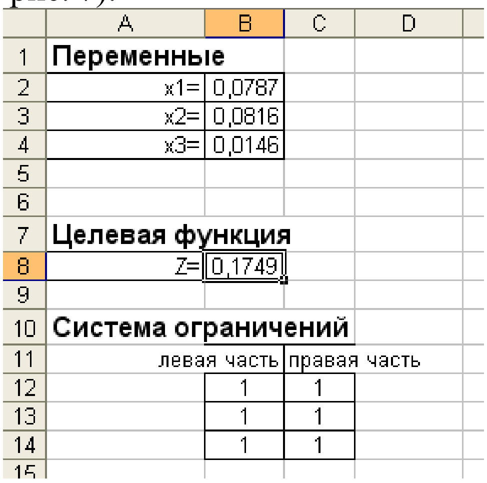
⇒ в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ вводим диапазон ячеек, которые играют роль переменных – B2:B4;

⇒ выбираем знак неравенства;

⇒ в поле ОГРАНИЧЕНИЕ вводим с клавиатуры ноль;

⇒ нажимаем кнопку ОК.

4. Осталось в окне ПОИСК РЕШЕНИЯ нажать кнопку ВЫПОЛНИТЬ и увидеть результат решения задачи (см. рис. 7):



	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1=	0,0787		
3	x2=	0,0816		
4	x3=	0,0146		
5				
6				
7	Целевая функция			
8	Z=	0,1749		
9				
10	Система ограничений			
11		левая часть	правая часть	
12		1	1	
13		1	1	
14		1	1	
15				

Рис. 7. Результаты решения для игрока А

Получили: $Z(0{,}0787;\ 0{,}0816;\ 0{,}0146) = 0{,}1749$. Так как $\nu = \dfrac{1}{Z}$ и $p_i = x_i \nu$, то $\nu = 5{,}7167$, $p_1 = 0{,}45;\ p_2 = 0{,}47;\ p_3 = 0{,}08$ – это решение для игры, заданной матрицей В (преобразованной матрицы). Для матрицы А: компоненты смешанной стратегии не меняются, а цена игры меньше на число, которое прибавляли ко всем элементам матрицы А, т.е. на 4.

Окончательный результат: $X^*(0{,}45;\ 0{,}47;\ 0{,}08)$, $\nu = 1{,}72$.

2. Рассмотрим оформление решения игры для игрока В в среде Maple

Для игрока В получена следующая задача линейного программирования:

найти значения переменных y_1, y_2, y_3, *удовлетворяющих системе ограничений:*

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + 10y_3 \le 1 \\ 9y_1 + 6y_2 + y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 8y_2 + 9y_3 \le 1 \end{cases}$$

и условию $y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$, *при котором функция* $Z' = y_1 + y_2 + y_3$ *принимает максимальное значение.*

В среде Maple для решения используется функция MAXIMIZE. Расчет для игрока B может быть оформлен как показано на рис. 8.

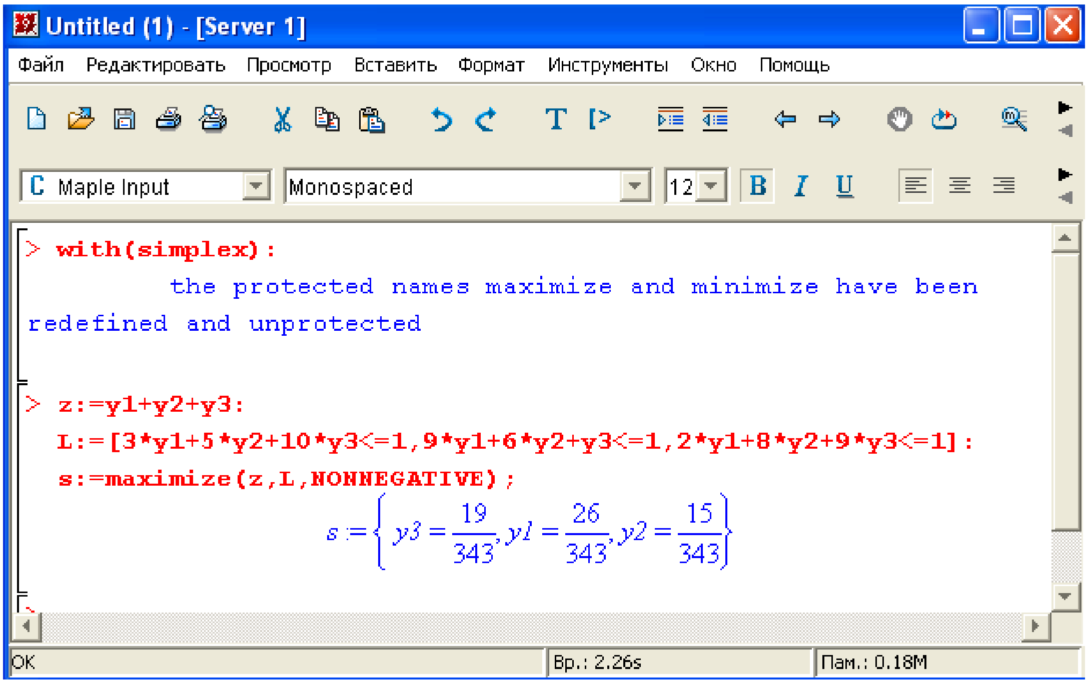


Рис. 8. Решение для игрока B средствами Maple

Теперь можно найти решение для игрока B:

$z = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{26}{343} + \frac{15}{343} + \frac{19}{343} = \frac{60}{343}$ (совпадает с решением для игрока A);

$v = \frac{1}{z} = \frac{343}{60} = 5\frac{43}{60} \approx 5{,}72$ (совпадает с решением для игрока A);

$$q_1 = y_1 \cdot v = \frac{26}{343} \cdot \frac{343}{60} = \frac{13}{30} \approx 0{,}43,\ q_2 = y_2 \cdot v = \frac{15}{343} \cdot \frac{343}{60} = \frac{1}{4} = 0{,}25,\ q_3 = y_3 \cdot v = \frac{19}{343} \cdot \frac{343}{60} = \frac{19}{60} \approx 0{,}32$$

.

Таким образом, решение для игрока B имеет вид:

$$Y^*\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{4}, \frac{19}{60}\right) \text{ или } Y^*(0{,}43;\ 0{,}25;\ 0{,}32),\ \nu = v - 4 = 1\frac{43}{60} \approx 1{,}72 .$$

Ответ: $X^*(0{,}45;\ 0{,}47;\ 0{,}08)$, $Y^*(0{,}43;\ 0{,}25;\ 0{,}32)$, $\nu = 1{,}72$.

3. Решим матричную игру методом последовательных приближений

Платежная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем нижнюю и верхнюю цену игры, определим наличие седловой точки.

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ -3 \\ -2 \end{array} \quad \alpha = -1 \\ \hline \begin{array}{ccc} 5 & 4 & 6 \end{array} & \end{array}$$

$\beta = 4$

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловой точки нет.

Допустим игрок А воспользуется своей минимаксной стратегией А1, тогда возможные проигрыши второго игрока –1, 1, 6. В этом случае игроку В выгодно использовать свою стратегию В1, поскольку проигрыш составит –1 (т.е. он выигрывает 1). Для стратегии В1 возможные выигрыши игрока А: –1, 5, –2. Теперь выгодной для игрока А является стратегия А2 с выигрышем 5. Сведем эту информацию в таблицу:

Номер партии	Стратегия первого игрока	Возможные проигрыши второго игрока			Стратегия второго игрока	Возможные выигрыши первого игрока			$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν
		В1	В2	В3		А1	А2	А3			
1	1	–1	1	6	1	–1	5	–2	–1	5	2
2	2										

В столбце $\underline{\nu}$ находится наименьший средний выигрыш –1, полученный вторым игроком в первой партии; в столбце $\overline{\nu}$ стоит наибольший средний выигрыш 5 первого игрока; в столбце ν находится среднее арифметическое $\nu = \frac{1}{2}(-1+5) = 2$, т.е. приближенное значение цены игры, полученное в результате проигрывания одной партии игры.

Рассуждая аналогично далее, получаем: во второй партии игрок А играет стратегией А2, которая соответствует наибольшему выигрышу 5 и соответственные проигрыши игрока В равны 5, 2, –3. Суммарные проигрыши игрока В составят:

–1 + 5 = 4 – при его первой стратегии,

1 + 2 = 3 – при его второй стратегии,

6 – 3 = 3 – при его третьей стратегии.

Эти суммарные проигрыши записываются во второй строке таблицы. Из всех суммарных проигрышей наименьшим является 3. Он получается при 2-й и 3-й стратегиях игрока В, следовательно, в этой партии он должен выбрать стратегию В2 (когда имеются два или несколько одинаковых суммарных проигрышей (выигрышей) выбирают стратегию с наименьшим номером).

При стратегии В2 первый выиграет 1, 2, 4, а суммарный выигрыш игрока А за обе партии составит:

–1 + 1 = 0 при его 1-й стратегии,

5 + 2 = 7 при его 2-й стратегии,

–2 + 4 = 2 при его 3-й стратегии.

Эти суммарные выигрыши записываются во второй строке таблицы:

Номер партии	Стратегия первого игрока	Возможные проигрыши второго игрока			Стратегия второго игрока	Возможные выигрыши первого игрока			$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν
		В1	В2	В3		А1	А2	А3			
1	1	–1	1	6	1	–1	5	–2	–1	5	2
2	2	4	3	3	2	0	7	2	3/2	7/2	5/2
3	2										

Из всех суммарных выигрышей первого игрока наибольшим является 7. Он получается при его второй стратегии, следовательно, в третью партию первый игрок должен применить свою 2-ю стратегию.

В столбец $\underline{\nu}$ ставится наименьший суммарный проигрыш второго игрока за две партии, деленный на число партий, т.е. $\frac{3}{2}$; в столбец $\overline{\nu}$ ставится наибольший суммарный выигрыш первого игрока за две партии, деленный на число партий, т.е. $\frac{7}{2}$; в столбец ν ставится среднее арифметическое этих значений, т.е. $\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}$. Это число $\frac{5}{2}$ принимается за приближенное значение цены игры при двух «сыгранных» партиях.

Продолжая этот процесс далее, составим таблицу партий до 20-й включительно:

Номер партии	Стратегия первого игрока	Возможные проигрыши второго игрока			Стратегия второго игрока	Возможные выигрыши первого игрока			$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν
		B1	B2	B3		A1	A2	A3			
1	1	–1	1	6	1	–1	5	–2	–1	5	2
2	2	4	3	3	2	0	7	2	3/2	7/2	5/2
3	2	9	5	0	3	6	4	7	0/3	7/3	7/6
4	3	7	9	5	3	12	1	12	5/4	12/4	17/8
5	1	6	10	11	1	11	6	10	6/5	11/5	17/10
6	1	5	11	17	1	10	11	8	5/6	11/6	16/12
7	2	10	13	14	1	9	16	6	10/7	16/7	26/14
8	2	15	15	11	3	15	13	11	11/8	15/8	26/16
9	1	14	16	17	1	14	18	9	14/9	18/9	32/18
10	2	19	18	14	3	20	15	14	14/10	20/10	34/20
11	1	18	19	20	1	19	20	12	18/11	20/11	38/22
12	2	23	21	17	3	25	17	17	17/12	25/12	42/24
13	1	22	22	23	1	24	22	15	22/13	24/13	46/26
14	1	21	23	29	1	23	27	13	21/14	27/14	48/28
15	2	26	25	26	2	24	29	17	25/15	29/15	54/30
16	2	31	27	23	3	30	26	22	23/16	30/16	53/32
17	1	30	28	29	2	31	28	26	29/17	31/17	60/34
18	1	29	29	35	1	30	33	24	29/18	33/18	62/36
19	2	34	31	32	2	31	35	28	31/19	35/19	66/38
20	2	39	33	29	3	37	32	33	30/20	37/20	67/40

Из последней таблицы видно, что в 20-ти проигранных партиях смешанная стратегия игрока А имеет вид: X*(9/20;10/20;1/20) или X*(0,45; 0,5; 0,05); стратегия игрока В имеет вид: Y*(9/20;4/20;7/20) или Y*(0,45; 0,2; 0,35); цена игры ν=67/40=1,675.

Сравнивая этот результат с точным решением, полученным с помощью MS Excel видим, что:

1) погрешность для цены игры составляет (1,72-1,675)/1,72*100%=3%;

2) средняя погрешность для стратегии X*: (0%+6%+38%)/3=14,7%;

3) средняя погрешность для стратегии Y*: (5%+20%+9%)/3=11,3%.

Ответ: X*(0,45; 0,5; 0,05), Y*(0,45; 0,2; 0,35), ν=1,675.

Задание на самостоятельную работу

Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 3 объекта. Стратегии отраслей: i-я стратегия состоит в финансировании i-го объекта (i = 1, 2, 3). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются матрицей 3x3.

Величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли - представленная игра может рассматриваться как игра двух игроков с нулевой суммой.

1. Решить точно матричную игру в MS Excel, записав ее как задачу линейного программирования.

2. Решить приближенно матричную игру методом последовательных приближений (сыграть 20 партий).

3. Сравнить полученные результаты.

Платежные матрицы даны по вариантам:

Вариант 1

-1	-4	5
-2	3	-3
-5	-3	3

Вариант 2

1	4	0
2	0	-2
-3	1	2

Вариант 3

-4	-1	2
1	3	2
5	-3	5

Вариант 4

-3	-1	5
3	3	-2
-4	5	-5

Вариант 5

-3	0	3
1	3	-3
4	-3	4

Вариант 6

-2	4	3
0	-1	0
1	5	-2

Вариант 7

-4	-2	-1
-1	-2	-1
-5	2	-2

Вариант 8

-3	-5	1
4	0	-3
-3	4	5

Вариант 9

-3	2	2
0	3	-3
3	-4	-1

Вариант 10

-3	2	-1
3	-4	-1
2	-2	3

Вариант 11

-1	2	0
-2	-4	4
3	-2	-1

Вариант 12

1	3	-1
-2	5	5
2	-1	1

Вариант 13

1	-2	-1
5	1	-4
-2	3	0

Вариант 14

6	2	5
1	4	-3
-2	7	1

Вариант 15

-4	2	1
1	0	-1
-5	1	3

Вариант 16

3	0	5
3	3	0
-3	5	2

Вариант 17

-2	5	4
-4	-1	6
5	-3	5

Вариант 18

0	1	-5
2	-2	-5
-4	-3	-1

Вариант 19

0	-4	-1
1	3	-4
-3	3	-2

Вариант 20

3	4	0
0	-1	3
2	3	1

Вариант 21

3	-4	-5
-7	2	-6
-4	-1	7

Вариант 22

5	-2	-7
-3	3	-1
-1	1	2

Вариант 23

-1	6	-3
1	0	2
2	3	-2

Вариант 24

2	-2	1
3	-5	1
-3	7	-2

Вариант 25

-6	6	2
3	-4	2
-4	4	4

Вариант 26

-5	-5	7
-2	-1	-5
6	-5	3

Вариант 27

-5	1	-5
-4	-4	7
-1	-5	1

Вариант 28

6	7	-4
-1	-4	1
4	-6	3

Вариант 29

0	-3	6
-1	4	-2
-4	-2	4

Вариант 30

3	6	2
4	2	0
-1	3	4

4. Статистические игры

Краткая теоретическая справка

К теории игр примыкает так называемая теория статистических решений. Зачастую принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. В этом случае противником игрока (*лица, принимающего решения* – ЛПР) является некоторая объективная действительность, которую принято называть *природой*.

Игра с природой (статистическая игра) – это парная матричная игра, в которой сознательный игрок А (статистик) выступает против участника, совершенно безразличного к результату игры, называемого природой.

Объективно система (природа, окружающая среда) не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

В общем виде платёжная матрица статистической игры имеет вид:

	S_1	S_2	…	S_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
…	...	...	...	...
A_n	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

В данной игре строки матрицы (A_i) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды. Будем считать, что элементы платежной матрицы имеют смысл дохода, т.е. чем больше значение, тем лучше для игрока А. Хотя в некоторых ситуациях они могут иметь обратный смысл, тогда рассуждения, приведенные ниже, нужно поменять соответствующим образом.

Начинать анализ платежной матрицы следует с определения «заведомо невыгодных» стратегий игрока А (доминируемых), которые исключаются из платежной матрицы. Удалять доминируемые стратегии – состояния окружающей среды нельзя, т.к. они принципиально не могут быть выгодными или невыгодными.

Нецелесообразно решать такую игру методами решения антагонистических игр, определяя смешанную стратегию игрока А. Здесь качественно другая ситуация. Поэтому решением является чистая стратегия игрока А, которая определяется с помощью критериев принятия решения. На практике часто применяются следующие критерии:

- Критерий Байеса.
- Критерий недостаточного основания Лапласа.
- Максиминный критерий Вальда.
- Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.
- Критерий Ходжа-Лемана.
- Критерий минимаксого риска Сэвиджа.

Согласно каждому критерию всем стратегиям игрока А ставится в соответствие некоторое число W_i, среди которых выбирается «наилучшее» в смысле используемого критерия, этому числу соответствует оптимальная стратегия игрока.

К сожалению, не существует общих правил оценки практической применимости того или иного критерия при принятии решений в условиях неопределенности. Скорее всего, это связано с тем, что поведение ЛПР, обусловленное неопределенностью ситуации, по всей видимости, является наиболее важным фактором при выборе подходящего критерия.

Критерий Байеса (критерий максимального математического ожидания)

При использовании этого критерия игроку А (статистику) должны быть известны вероятности, с которыми система (окружающая среда) находится в каждом из своих состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Обозначим эти вероятности соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, при этом $\sum_j p_j = 1$. Информация о вероятностях состояний окружающей среды может быть известна, например, на основе данных статистических наблюдений (на метеостанциях более ста лет ежедневно фиксируются значения различных метеопараметров, на основе этой информации можно рассчитать статистическую вероятность – относительную частоту интересующего состояния окружающей среды).

Оптимальным можно считать такое поведение игрока А, при котором максимизируется его средний выигрыш (математическое ожидание выигрыша). Речь идет о максимизации среднего выигрыша при многократном повторении принятия решения.

Каждая строка дополняется числом:

$$W_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j \,,\ i = 1,\ldots,m \,.$$

Среди всех W_i, выбирается максимальное (которому и соответствует оптимальная стратегия):

$$W = \max_i W_i \,.$$

Критерий недостаточного основания Лапласа

Если вероятности состояний окружающей среды примерно равны, или нет о них информации, то можно пользоваться критерием Лапласа:

$$W_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,,\ i = 1,\ldots,m \,.$$

$$W = \max_i W_i \,.$$

Максиминный критерий Вальда

Это критерий крайнего пессимизма, его использование абсолютно исключает риск: оптимальная стратегия соответствует нижней цене игры (максимину):

$$W_i = \min_j a_{ij} \,,\ i = 1,\ldots,m \,.$$

$$W = \max_i W_i \,.$$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

Крайнему пессимизму можно противопоставить крайний оптимизм (*критерий азартного игрока*), когда ставка делается на самый большой возможный выигрыш, т.е. на самый большой элемент платежной матрицы:

$$W_i = \max_j a_{ij} \,,\ i = 1,\ldots,m \,.$$

$$W = \max_i W_i \,.$$

Но такой критерий принятия решения практически не применятся. Зато применяется критерий «умеренного оптимизма», который называют критерием пессимизма-оптимизма Гурвица (а также критерием обобщенного максимума). Вводится *коэффици-*

ент пессимизма $C \in [0, 1]$, который определяется из соображений правдоподобия, здравого смысла или просто из интуитивных соображений (чем больше значение С, тем больше пессимизма).

$$W_i = C \cdot \min_j a_{ij} + (1 - C) \cdot \max_j a_{ij}, \ i = 1,...,m.$$

$$W = \max_i W_i.$$

При $C = 0$ имеем критерий азартного игрока (пессимизм отсутствует).

При $C = 1$ имеем максиминный критерий Вальда – позиция крайнего пессимизма.

Критерий Ходжа-Лемана

Этот критерий является промежуточным между критерием Байеса и максиминным критерием Вальда. Если есть сомнения относительно достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды, то можно ввести соответствующий параметр $u \in [0, 1]$ – параметр достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды. Чем меньше значение u, тем сильнее на принятие решения влияет исключение риска по критерию Вальда.

$$W_i = u \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + (1 - u) \cdot \min_j a_{ij}, \ i = 1,...,m.$$

$$W = \max_i W_i.$$

При $u = 0$ имеем критерий Вальда.

При $u = 1$ имеем критерий Байеса.

Критерий минимаксого риска Сэвиджа

Наряду с платежной матрицей можно рассматривать *матрицу рисков*. Если бы игрок А знал, в каком состоянии будет природа, например S_j, то он выбрал бы ту свою стратегию, которая соответствует максимальному элементу j-го столбца (максимальному выигрышу при состоянии природы S_j). В этом случае риск игрока А – потеря этого максимального выигрыша – равен нулю ($r = 0$). Риски для других стратегий – положительны, они равны разнице между максимальным элементов столбца и данным элементом:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max_i a_{ij}$ – максимальный элемент j-го столбца.

При анализе матрицы рисков цель игрока А – минимизировать свой риск. Так, аналогом максиминного критерия Вальда является критерий минимаксного риска Сэвиджа, который также относится к позиции крайнего пессимизма. Для матрицы рисков критерий рассчитывается следующим образом:

$$W_i = \max_j r_{ij}, \ i = 1,...,m.$$

$$W = \min_i W_i.$$

Можно заметить, что к матрице рисков также применимы и другие критерии, например, критерий Байеса, но теперь нужно минимизировать средний риск и т.п.

Решение типового примера

Рассмотрим пример решения статистической игры в экономической задаче.

Сельскохозяйственное предприятие может реализовать некоторую продукцию:

A1) сразу после уборки;

A2) в зимние месяцы;

A3) в весенние месяцы.

Прибыль зависит от цены реализации в данный период времени, затратами на хранение и возможных потерь. Размер прибыли, рассчитанный для разных состояний-соотношений дохода и издержек (S1, S2 и S3), в течение всего периода реализации, представлен в виде матрицы (млн. руб.)

	S1	S2	S3
A1	2	-3	7
A2	-1	5	4
A3	-7	13	-3

Определить наиболее выгодную стратегию по всем критериям (критерий Байеса, критерий Лапласа, максиминный критерий Вальда, критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, критерий Ходжа-Лемана, критерий минимаксого риска Сэвиджа), если вероятности состояний спроса: 0,2; 0,5; 0,3; коэффициент пессимизма C = 0,4; коэффициент достоверности информации о состояниях спроса u = 0,6.

Решение

Результаты расчетов будем заносить в таблицу:

	S1	S2	S3	Б	НО	ММ	П-О	Х-Л
A1	2	-3	7	1	2	-3	3	-0,6
A2	-1	5	4	3,5	2,7	-1	2,6	1,7
A3	-7	13	-3	4,2	1	-7	5	-0,28
p_j	0,2	0,5	0,3	**A3**	**A2**	**A2**	**A3**	**A2**

1. Критерий Байеса (максимального математического ожидания)

Расчет осуществляется по формуле: $W_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} p_j = a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + a_{i3}p_3$;

$W_1 = 2 \cdot 0{,}2 + (-3) \cdot 0{,}5 + 7 \cdot 0{,}3 = 0{,}4 - 1{,}5 + 2{,}1 = 1$;

$W_2 = -1 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 = -0{,}2 + 2{,}5 + 1{,}2 = 3{,}5$;

$W_3 = -7 \cdot 0{,}2 + 13 \cdot 0{,}5 + (-3) \cdot 0{,}3 = -1{,}4 + 6{,}5 - 0{,}9 = 4{,}2$.

Найденные значения заносим в первый столбец (Б) и выбираем максимальное $W = \max\{1;\ 3{,}5;\ 4{,}2\} = 4{,}2$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия A3 – продавать в весенние месяцы.

2. Критерий недостаточного основания Лапласа (НО)

Находим среднее значение элементов каждой строки: $W_i = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \frac{1}{3}(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3})$.

$W_1 = \frac{1}{3}(2 - 3 + 7) = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$;

$W_2 = \frac{1}{3}(-1 + 5 + 4) = \frac{1}{3} \cdot 8 \approx 2{,}7$;

$W_3 = \frac{1}{3}(-7 + 13 - 3) = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

Найденные значения заносим во второй столбец (НО) и выбираем максимальное $W = \max\{2;\ 2{,}7;\ 1\} = 2{,}7$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

3. Максиминный критерий Вальда (ММ)

В каждой строке находим минимальный элемент: $W_i = \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$.

$W_1 = \min\{2;\ -3;\ 7\} = -3$;

$W_2 = \min\{-1;\ 5;\ 4\} = -1$;

$W_3 = \min\{-7;\ 13;\ -3\} = -7$.

Найденные значения заносим в третий столбец (ММ) и выбираем максимальное $W = \max\{-3;\ -1;\ -7\} = -1$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

4. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица (П-О)

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле: $W_i = C \cdot \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij} + (1 - C) \cdot \max\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$. По условию $C = 0{,}4$, значит:

$W_1 = 0{,}4 \cdot \min\{2;\ -3;\ 7\} + (1 - 0{,}4) \cdot \max\{2;\ -3;\ 7\} = 0{,}4 \cdot (-3) + 0{,}6 \cdot 7 = -1{,}2 + 4{,}2 = 3$;

$W_2 = 0{,}4 \cdot \min\{-1;\ 5;\ 4\} + (1 - 0{,}4) \cdot \max\{-1;\ 5;\ 4\} = 0{,}4 \cdot (-1) + 0{,}6 \cdot 5 = -0{,}4 + 3 = 2{,}6$;

$W_3 = 0{,}4 \cdot \min\{-7;\ 13;\ -3\} + (1 - 0{,}4) \cdot \max\{-7;\ 13;\ -3\} = 0{,}4 \cdot (-7) + 0{,}6 \cdot 13 = -2{,}8 + 7{,}8 = 5$.

Найденные значения заносим в четвертый столбец (П-О) и выбираем максимальное $W = \max\{3;\ 2{,}6;\ 5\} = 5$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А3 – продавать в весенние месяцы.

5. Критерий Ходжа-Лемана (Х-Л)

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле: $W_i = u \cdot \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij} p_j + (1 - u) \cdot \min\limits_{1 \le j \le 3} a_{ij}$. По условию $u = 0{,}6$ и множители в каждом слагаемом уже рассчитаны, их можно взять их первого столбика (Б) и из третьего столбика (ММ), значит:

$W_1 = 0{,}6 \cdot 1 + (1 - 0{,}6) \cdot (-3) = 0{,}6 - 1{,}2 = -0{,}6$;

$W_2 = 0{,}6 \cdot 3{,}5 + 0{,}4 \cdot (-1) = 2{,}1 - 0{,}4 = 1{,}7$;

$W_3 = 0{,}6 \cdot 4{,}2 + 0{,}4 \cdot (-7) = 2{,}52 - 2{,}8 = -0{,}28$.

Найденные значения заносим в пятый столбец (Х-Л) и выбираем максимальное $W = \max\{-0{,}6;\ 1{,}7;\ -0{,}28\} = 1{,}7$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

5. Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Рассчитаем матрицу рисков. Заполнять ее лучше по столбцам. В каждом столбце находим максимальный элемент и вы читаем из него все остальные элементы столбца, результаты записываем на соответствующих местах.

Вот как рассчитывается первый столбец. Максимальный элемент в первом столбце: $a_{11} = 2$, значит по формуле $r_{ij} = \max\limits_{i} a_{ij} - a_{ij}$:

$r_{11} = 2 - a_{11} = 2 - 2 = 0$;

$r_{21} = 2 - a_{21} = 2 - (-1) = 3$;

$r_{31} = 2 - a_{31} = 2 - (-7) = 9$.

Рассчитаем второй столбец матрицы рисков. Максимальный элемент во втором столбце: $a_{32} = 13$, значит:

$r_{12} = 13 - a_{12} = 13 - (-3) = 16$;

$r_{22} = 13 - a_{22} = 13 - 5 = 8$;

$r_{32} = 13 - a_{32} = 13 - 13 = 0$.

Рассчитаем третий столбец матрицы рисков. Максимальный элемент в третьем столбце: $a_{13} = 7$, значит:

$r_{13} = 7 - a_{13} = 7 - 7 = 0$;

$r_{23} = 7 - a_{23} = 7 - 4 = 3$;

$r_{33} = 7 - a_{33} = 7 - (-3) = 10$.

Таким образом, матрица рисков имеет вид (в каждом столбце на месте максимального элемента платежной матрицы должен стоять ноль):

			W_i
0	16	0	16
3	8	3	8
9	0	10	10

Дополним матрицу рисков рассчитанными значениями критерия W_i – в каждой строке выбираем максимальный элемент ($W_i = \max\limits_j r_{ij}$):

$W_1 = \max\{0; 16; 0\} = 16$;

$W_2 = \max\{3; 8; 3\} = 8$;

$W_3 = \max\{9; 0; 10\} = 10$;

Найденные значения заносим в столбец (W_i) и выбираем минимальное $W = \min\{16; 8; 10\} = 8$, значит оптимальной по данному критерию является стратегия А2 – продавать в зимние месяцы.

Вывод:

1) Стратегия А1 (продавать сразу после уборки) не является оптимальной ни по одному из критериев.

2) Стратегия А2 (продавать в зимние месяцы) является оптимальной согласно критериям недостаточного основания Лапласа, максиминного критерия Вальда и минимаксного критерия Сэвиджа.

3) Стратегия А3 (продавать в весенние месяцы) является оптимальной согласно критериям Байеса, пессимизма-оптимизма Гурвица, Ходжа-Лемана.

Задание на самостоятельную работу

Задания по вариантам (N – номер варианта; N = 1, …, 30)

Сельскохозяйственное предприятие планирует посадить некоторую сельскохозяйственную культуру двух сортов. Посевная площадь 1000 га. Сорта отличаются друг от друга требованиями к влаге во время вегетационного периода. Проанализировав погодные условия, выделены 4 состояния погоды (S1, S2, S3, S4), отличающиеся режимом осадков и найдены статистические вероятности каждого состояния: p1=0.1; p2=0.3;

p3=0.4; p4=0.2. Средняя урожайность (ц/га) каждого сорта на всем участке для каждой состояния погоды приведена в таблице:

	S1	S2	S3	S4
Сорт 1	23+N	29+N	31+N	37+N
Сорт 2	36+N	33+N	28+N	24+N

Возможные варианты посева:

A1) сорт 1 посадить на 100% площади;

A2) сорт 1 посадить на 75% площади, сорт 2 посадить на 25% площади;

A3) сорт 1 посадить на 50% площади, сорт 2 посадить на 50% площади;

A4) сорт 1 посадить на 25% площади, сорт 2 посадить на 75% площади;

A5) сорт 2 посадить на 100% площади;

Определить оптимальную стратегию с помощью критериев максимального математического ожидания, недостаточного основания Лапласа, максиминного критерия Вальда, пессимизма-оптимизма Гурвица (коэффициент пессимизма взять равным 0,4), критерия Ходжа-Лемана (коэффициент достоверности информации о состояниях погоды принять равным 0,7), критерия минимаксного риска Сэвиджа.

Задания для аудиторной работы

1. Два магазина могут продавать некоторый товар по 10 руб., по 12 руб. и по 14 руб. за шт. Каждый день покупатели приобретают в этих магазинах 100 ед. этого товара. Если цена будет одинаковая, то в обоих магазинах купят равное количество товара. Если разница в ценах будет 2 рубля, то более дешевый товар купят 70% покупателей. Если разница в ценах будет 4 рубля, то более дешевый товар купят 90% покупателей. Составить платежную матрицу, отражающую разность дохода первого и второго магазина при любом сочетании стратегий.

2. Игра с двумя картами. Имеются две карты: туз и двойка. Игрок А наугад вынимает одну из них; В не видит, какую карту он вынул. Если А вынул туза, он заявляет «у меня туз», и требует у противника 1 рубль. Если А вынул двойку, то он может либо А1) сказать «у меня туз» и потребовать у противника 1 рубль, либо А2) признаться, что у него двойка, и уплатить противнику 1 рубль.

Противник, если ему добровольно платят 1 рубль, может только принять его. Если же у него потребуют 1 рубль, то он может либо В1) поверить игроку А, что у него туз и отдать ему 1 рубль, либо В2) потребовать проверки с тем, чтобы убедиться, верно ли утверждение А. Если в результате проверки окажется, что у А действительно туз, В должен уплатить А 2 рубля. Если же окажется, что А обманывает и у него двойка, игрок А уплачивает игроку В 2 рубля.

Требуется проанализировать игру и найти оптимальную стратегию каждого из игроков.

3. Два игрока А и В, не глядя друг на друга, кладут на стол по монете вверх гербом или решкой, по своему усмотрению. Если игроки выбрали одинаковые стороны (у обоих герб или у обоих решка), то игрок А забирает монеты; иначе их забирает игрок В. Требуется проанализировать игру и составить ее матрицу.

4. Игра с укладыванием монет на круглый стол. Два игрока поочередно кладут одинаковые монеты на круглый стол, выбирая каждый раз произвольное положение центра монеты; взаимное накрывание монет не допускается. Выигрывает тот из игроков, кто положит последнюю монету (когда места для других уже не останется).

5. Игрок А записывает одно из двух чисел: 1 или 2, игрок В – одно из трёх чисел: 1, 2 или 3. Если оба числа одинаковой чётности, то А выигрывает и выигрыш равен сумме этих чисел, если чётности выбранных игроками чисел не совпадают, то В выигрывает, выигрыш равен сумме этих чисел. Построить платёжную матрицу игры, определить нижнюю и верхнюю цены игры и проверить наличие седловой точки.

6. Игра с двумя пальцами. Два человека одновременно показывают один или два пальца и называют цифру один или два, которая по их мнению означает количество пальцев, показываемое вторым человеком. После того, как пальцы показаны и названы числа, происходит распределение выигрышей по следующим правилам: если оба угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то фиксируется ничья - выигрыш нуль у каждого человека; если оба не угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то также фиксируется ничья; если только один человек угадал, сколько пальцев показал второй человек, то он (угадавший) получает выигрыш за счёт второго (неугадавшего) в виде денег или очков пропорционально сумме показанных пальцев обоими участниками игры.

7. Игра полковника Блотто. Имеется два противника и две позиции. Один противник – это полковник, второй - генерал. У полковника имеется 4 полка, у генерала – 3 полка. Каждый из этих противников хочет занять данные позиции. Взятие позиции оценивается выигрышем в единицу. Каждый из противников может послать на любую позицию только целое число полков или совсем не посылать. Позиция считается занятой тем, кто послал на неё больше полков, и выигрыш составляет единицу за счёт взятия позиции и плюс количество единиц, совпадающее с количеством полков противника, не занявшего позицию. Если у позиции оказывается одинаковое число полков полковника и генерала, то никто не выигрывает, выигрыш обоих составляет 0. Общий выигрыш каждого участника равен сумме его выигрышей у обеих позиций, и то, что получил один из противников, считается потерей для другого.

8. Случайно выбирается целое число z с возможными значениями 1, 2, 3, 4 (каждое имеет вероятность 1/4). Игрок 1, не зная результата этого хода, выбирает целое число x. Игрок 2, не зная ни результата случайного хода, ни выбора игрока 1, выбирает целое число y. Выигрыш определяется следующим образом:

$$(|\,y - z\,| - |\,x - z|, |\,x - z\,| - |\,y - z\,|),$$

т.е. целью является выбор числа, по возможности близкого к z.

9. Упростить платежную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & 7 & -4 \\ 1 & -6 & 2 & -7 \\ -2 & 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

10. Решить матричную игру $P = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X^*\left(\frac{9}{14}; \frac{5}{14}\right)$, $Y^*\left(\frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right)$, $\nu \approx 6{,}29$.

Результаты моделирования:

Кол-во партий	Средний выигрыш игрока А	Относительное отклонение выигрыша	Частота стратегии А1	Относительное отклонение стратегии А1	Частота стратегии В1	Относительное отклонение стратегии В1
100	6,08	3%	67	4%	92	7%
200	6,06	4%	135	5%	180	5%
300	6,04	4%	204	6%	264	3%
500	6,13	3%	349	9%	434	1%
1000	6,23	1%	681	6%	859	0%
1500	6,27	0%	985	2%	1285	0%
2000	6,3	0%	1302	1%	1715	0%

11. Дилемма заключенных. Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Судья предложил каждому следующую сделку. Если один сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года. Для каждого игрока записать платежную матрицу.

12. На столе лежит 25 спичек. Играющие могут по очереди взять от одной до четырех спичек. Кто не может сделать ход (спичек не осталось), проигрывает, т.е. выигрывает взявший последнюю спичку.

13. Шоколадка представляет собой прямоугольник 5x8, разделенный углублениями на 40 квадратиков. Двое по очереди разламывают ее на части по углублениям: за один ход можно разломить любой из кусков (больший одного квадратика) на два. Кто не сможет сделать хода (все куски уже разломаны), проигрывает.

14. Двое игроков пишут двадцатизначное число слева направо, по очереди приписывая к нему по одной цифре. Первый игрок выигрывает, если полученное число не делится на 7, второй – если делится.

15. В клетке a1 шахматной доски стоит пешка. Двое игроков по очереди двигают ее, причем каждый может подвинуть ее на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Первым ходит Макс. Когда пешка попадает на диагональ (это будет после 7 ходов), игра кончается, и ее результат (сколько Мин платит Максу) определяется по таблице:

3							
	1						
		4					
			1				
				5			
					9		
						2	
							6

Найти оптимальные стратегии игроков (Макса и Мина).

16. дана следующая матрица рисков в игре 2x3: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Известно, что $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = 1$. Постройте платежную матрицу.

Замечание: $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $\beta_j = \max\limits_{1 \le i \le m} a_{ij}$.

17. Дана платежная матрица $P = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите вероятности состояний природы P_1 и P_2, если известно, что при использовании оптимальной стратегии игрок получает выигрыш, равный 11/2. Найдите также оптимальную стратегию.

18. Имеется 4 участка, одинаковые по площади, но разные по степени влажности почвы: участок I с повышенной влажностью, участок II со средней влажностью, участок III с пониженной влажностью, участок IV с особо низкой влажностью. Предстоит выбрать участок под посадку картофеля. Имеется 4 стратегии: A_1, A_2, A_3, A_4, отвечающие выбору участков I, II, III, IV соответственно. Для получения хорошего урожая картофеля требуется определенное количество влаги в почве в период вегетации. При излишней влажности картофель может частично сгнить на корню и, кроме того, может быть сильно забит сорняками. При недостатке влаги в почве картофель будет плохо развиваться. Выделено три состояния погоды: S_1 – в период вегетации выпало много осадков, заметно больше нормы (p_1=0,2); S_2 – осадки в норме (p_2=0,5); S_3 – осадков заметно меньше нормы (p_3=0,3). Средняя урожайность картофеля на 1 га различна для разных участков и для разных погодных условий. Средняя урожайность картофеля (ц/га) описывается матрицей:

	S_1	S_2	S_3
A_1	1	2	2,4
A_2	1,2	2,3	2
A_3	2	2,2	1
A_4	1,8	1,4	0,5

Определить оптимальную стратегию с помощью критериев максимального математического ожидания, недостаточного основания Лапласа, максиминного критерия Вальда, пессимизма-оптимизма Гурвица (коэффициент пессимизма взять равным 0,3), критерия Ходжа-Лемана (коэффициент достоверности информации о состояниях погоды принять равным 0,8), критерия минимаксного риска Сэвиджа.

Приложение 1

Бланк для моделирования результатов решения игры 2х2

ФИО_____________________________ Вариант ___________

Номер партии	Случайное число игрока А	Стратегия игрока А	Случайное число игрока В	Стратегия игрока В	Выигрыш А	Накопленный выигрыш А	Средний выигрыш А (цена игры)
1.	0,029		0,125				
2.	0,611		0,490				
3.	0,766		0,958				
4.	0,738		0,564				
5.	0,944		0,257				
6.	0,416		0,886				
7.	0,513		0,226				
8.	0,717		0,467				
9.	0,994		0,822				
10.	0,412		0,244				
11.	0,259		0,176				
12.	0,610		0,658				
13.	0,207		0,451				
14.	0,071		0,994				
15.	0,391		0,724				
16.	0,835		0,469				
17.	0,062		0,392				
18.	0,181		0,457				
19.	0,891		0,336				
20.	0,375		0,094				
21.	0,009		0,522				
22.	0,255		0,806				
23.	0,273		0,562				
24.	0,111		0,805				
25.	0,888		0,037				
26.	0,392		0,341				
27.	0,843		0,808				
28.	0,086		0,585				
29.	0,426		0,370				
30.	0,562		0,688				

Приложение 2

Бланк для решения матричной игры методом последовательных приближений

ФИО______________________________ Вариант ___________

Номер партии	Стратегия первого игрока	Возможные проигрыши второго игрока			Стратегия второго игрока	Возможные выигрыши первого игрока			$\underline{\nu}$	$\overline{\nu}$	ν
		B1	B2	B3		A1	A2	A3			
1											
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											

Оптимальные стратегии игроков:
X*(_____________)
Y*(_____________)

Приложение 3

Равномерно распределенные случайные числа

0,02988	0,12558	0,25974	0,17641	0,00937	0,52264	0,08086	0,84858	0,99427	0,49452
0,61109	0,49042	0,61076	0,65834	0,25579	0,80641	0,07675	0,84419	0,18268	0,29702
0,76606	0,95854	0,20704	0,45154	0,27367	0,56261	0,30037	0,96485	0,47252	0,55084
0,73868	0,56421	0,07183	0,99420	0,11184	0,80524	0,42897	0,45031	0,05350	0,67078
0,94483	0,25710	0,39190	0,72491	0,88888	0,03791	0,50773	0,63034	0,94091	0,80165
0,41647	0,88664	0,83519	0,46930	0,39285	0,34159	0,77252	0,65987	0,48750	0,79735
0,51314	0,22625	0,06211	0,39299	0,84336	0,80859	0,52694	0,73306	0,36874	0,93390
0,71749	0,46727	0,18182	0,45791	0,08667	0,58570	0,75495	0,68645	0,90270	0,87484
0,99401	0,82235	0,89122	0,33631	0,42694	0,37053	0,70413	0,59805	0,40425	0,96181
0,41244	0,24426	0,37553	0,09464	0,56208	0,68889	0,59503	0,92378	0,03108	0,33182

0,06428	0,40308	0,61733	0,25701	0,55144	0,42344	0,36034	0,67524	0,19628	0,39112
0,76893	0,80957	0,56225	0,62275	0,04293	0,47489	0,13456	0,77198	0,12468	0,75491
0,13208	0,75581	0,31683	0,24176	0,67439	0,64703	0,15862	0,25507	0,03202	0,21096
0,73643	0,55302	0,47629	0,93283	0,68451	0,42510	0,54809	0,05326	0,19976	0,97378
0,62204	0,94838	0,15169	0,70663	0,83586	0,13781	0,63465	0,21988	0,93957	0,31520
0,07839	0,11666	0,35227	0,13427	0,61833	0,16719	0,12016	0,64336	0,77480	0,86041
0,83250	0,42249	0,51044	0,25119	0,94154	0,99712	0,83641	0,20537	0,63808	0,39483
0,85673	0,85089	0,28419	0,59462	0,47904	0,31065	0,02794	0,54871	0,31417	0,55898
0,75347	0,92514	0,04964	0,75030	0,93800	0,97254	0,41409	0,31032	0,23870	0,29442
0,62758	0,61130	0,12625	0,72826	0,48506	0,99660	0,44510	0,21017	0,17870	0,02981

0,79640	0,51130	0,07301	0,51032	0,66215	0,47242	0,30286	0,80875	0,06193	0,58888
0,88354	0,78258	0,64343	0,54479	0,08452	0,57100	0,20346	0,83214	0,38734	0,44309
0,44882	0,45845	0,17718	0,05551	0,38909	0,85212	0,56127	0,14715	0,09910	0,19302
0,14129	0,02946	0,35912	0,62844	0,64329	0,19039	0,33253	0,24154	0,19577	0,74391
0,04527	0,37561	0,61878	0,02553	0,14727	0,59539	0,82544	0,05170	0,94714	0,30052
0,35683	0,23365	0,57521	0,11776	0,36137	0,09732	0,06056	0,80001	0,31284	0,57280
0,62673	0,25879	0,21243	0,38995	0,11879	0,36586	0,02472	0,71774	0,49823	0,17584
0,28306	0,95646	0,51488	0,19821	0,05984	0,19862	0,80922	0,71920	0,14294	0,20082
0,98928	0,41612	0,57121	0,01453	0,58725	0,89637	0,05521	0,67878	0,39561	0,74919
0,44108	0,43385	0,86583	0,11482	0,19384	0,92890	0,52784	0,01360	0,91198	0,98159

0,28697	0,19942	0,41087	0,35288	0,98234	0,66017	0,91334	0,89508	0,56661	0,29694
0,45216	0,45960	0,52410	0,57526	0,50903	0,74213	0,61221	0,60080	0,82132	0,68069
0,27331	0,08052	0,44792	0,84242	0,26637	0,32982	0,46604	0,65241	0,84421	0,15063
0,34311	0,63930	0,43829	0,48463	0,02902	0,09894	0,13703	0,08368	0,11494	0,25139
0,04077	0,75021	0,15293	0,33430	0,08619	0,89567	0,59706	0,38817	0,17403	0,35937
0,01042	0,46584	0,85385	0,65072	0,21152	0,59361	0,78327	0,72696	0,47454	0,40506
0,00667	0,08945	0,55206	0,68136	0,62554	0,65966	0,34458	0,36694	0,08815	0,34070
0,31149	0,53934	0,82927	0,35491	0,31710	0,24980	0,71555	0,90912	0,89007	0,19737
0,77603	0,36895	0,38569	0,32902	0,67927	0,54222	0,42100	0,82640	0,44906	0,93955
0,60127	0,21631	0,51221	0,56408	0,74953	0,26179	0,43488	0,44669	0,25248	0,85931

0,79172	0,60996	0,46486	0,48824	0,22891	0,42349	0,40216	0,20702	0,12331	0,36567
0,55588	0,20937	0,01108	0,37251	0,99880	0,44969	0,02010	0,11352	0,15533	0,18635
0,19998	0,59670	0,05333	0,76846	0,10413	0,78771	0,52544	0,92986	0,23817	0,96863
0,38874	0,68853	0,90859	0,85754	0,76407	0,26378	0,74911	0,30056	0,43540	0,24335
0,87837	0,17863	0,36411	0,01456	0,19101	0,46579	0,80272	0,91756	0,08297	0,74312
0,16727	0,62836	0,33135	0,51248	0,19511	0,79050	0,57783	0,05399	0,65791	0,96858
0,24944	0,10878	0,84673	0,79399	0,26243	0,65681	0,48544	0,01817	0,68618	0,28303
0,82386	0,83907	0,05172	0,30709	0,44124	0,41150	0,10495	0,22372	0,72297	0,66630
0,08585	0,53025	0,12744	0,01054	0,96998	0,03388	0,29976	0,72498	0,03166	0,01429
0,08350	0,87209	0,72819	0,72269	0,87351	0,38623	0,87481	0,86403	0,72317	0,79337

Список литературы

1. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. – М.: Физматлит, 1961. – 127 с.
2. Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. – М., 2003. – 278 с.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. - М.: Высшая школа, 2001. - 208 с.
4. Вентцель Е.С. Элементы теории игр. – М., 1961. – 67 с.
5. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
6. Дубров А.М., Лагоша Б.А., Хрусталев Е.Ю. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие / Под ред. Б.А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 1999. - 176 с.
7. Игровые модели и принятие решений: Методические указания для студентов экономического факультета / Составитель К.А. Лапшин. – М., 2001. – 45 с.
8. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.5. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория игр. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. - 296 с.
9. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ, 2003. - 407 с.
10. Крушевский А.В. Теория игр. – Киев: Вища школа, 1977. – 216 с.
11. Кузнецов Б.Т. Математика. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2004. - 719 с.
12. Меньшиков И.С. Лекции по теории игр и экономическому моделированию. – М.: МЗ Пресс, 2006. – 208 с.
13. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985. – 200 с.
14. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970. – 708 с.
15. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971. – 230 с.
16. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высш. шк., 1998. – 304 с.
17. Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б. Преследование на плоскости. – М.: Наука, 1991. – 94 с.
18. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. – М.: Наука, 1986. – 223 с.
19. Тарасов Л.В. Закономерности окружающего мира. В 3 кн. Кн. 2. Вероятность в современном обществе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 360 с.
20. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: МЦНМО, 2007. – 40 с.

ДЕРКАЧ Дмитрий Васильевич
Матричные игры: задания и методические рекомендации по выполнению самостоятельных расчетных работ. Учебно-методическое пособие

Подписано в печать: 15.02.2010 г. Формат 60x90/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Тираж 100 экз. Печать трафаретная цифровая. Усл.печ.л. 2,6. Уч.изд.л. 1,5