ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений методом Эйлера.

Цель работы: Изучить метод Эйлера и научиться решать численно дифференциальные уравнения этим методом.

Задание: С помощью метода Эйлера составить таблицу приближенных значений частного решения дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x;y)$ при заданном начальном условии: $y\big|_{x=x_0} = y_0$ на отрезке $[x_0; b]$. Все вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака.

Описание метода Эйлера.

Большое число дифференциальных уравнений, встречающихся в приложениях, могут быть решены только численно. Это означает, что мы не можем указать аналитическое выражение для функции, которая является решением данного дифференциального уравнения.

Но для того, чтобы найти функцию, которая есть решение дифференциального уравнения, нам не обязательно иметь ее аналитическое выражение. Функцию можно определить, например, в виде таблицы значений x_i, y_i. Построив эти точки и соединив их, можно получить линию, которая приблизительно соответствует частному решению дифференциального уравнения. Понятно, что чем больше точек будет взято, тем точнее будет соответствовать наше приближение точному решению.

В настоящее время существует большое число различных численных методов, позволяющих получить результаты различной точности. Одним из самых простых методов численного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Эйлера. Он широко применяется при изучении аэродинамики. Рассмотрим суть метода.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x;y) \qquad (1)$$

и начальное условие $y\big|_{x=x_0} = y_0$. Требуется найти частное решение, удовлетворяющее этому начальному условию.

Разобьем отрезок $[x_0; b]$ точками $x_0; x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ на n равных частей. Обозначим разность $x_{i+1} - x_i = h$. Проведем через точки разбиения x_i прямые, параллельные оси OY (Рис. I).

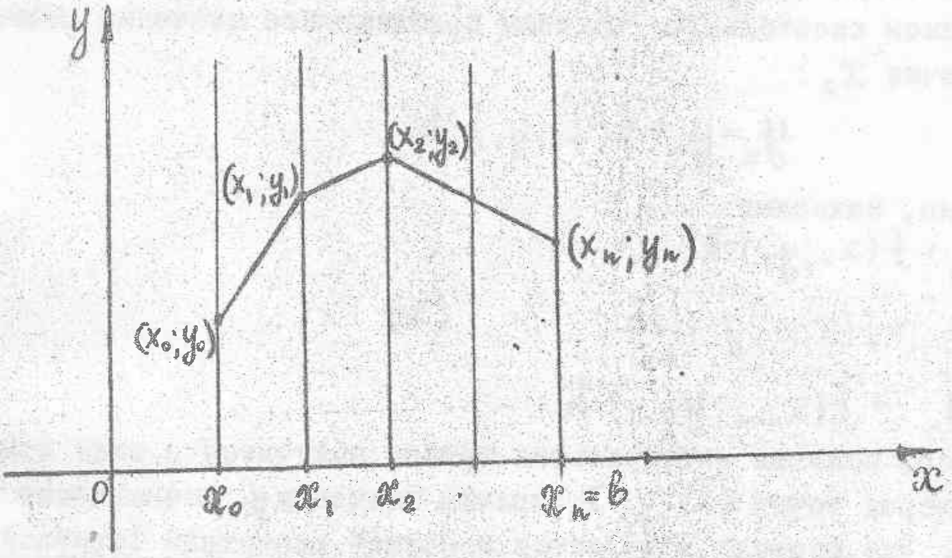

Рис. I.

Проделаем следующие однотипные операции:

I. Подставим значения x_0, y_0 в уравнение (I) и вычислим угловой коэффициент $K = y' = f(x_0; y_0)$ касательной к неизвестной интегральной кривой в точке $(x_0; y_0)$. Заменим на отрезке $[x_0; x_1]$ эту неизвестную интегральную кривую отрезком касательной, проведенной в точке $(x_0; y_0)$. (Рис. 2.)

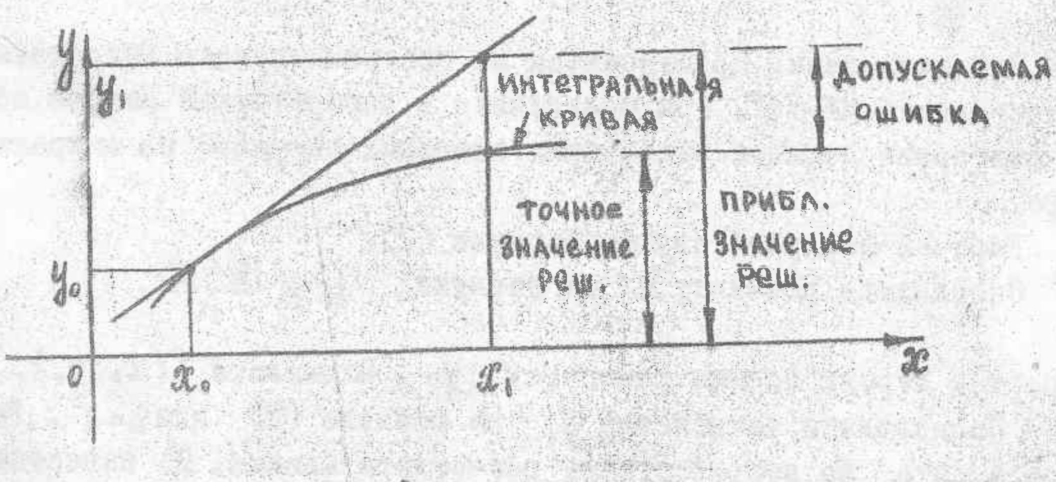

Рис. 2.

Уравнение касательной, проведенной через две точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ имеет вид:

$$y_1 - y_0 = K(x_1 - x_0), \quad \text{где} \quad K = f(x_0; y_0),$$

откуда:

$$y_1 = y_0 + f(x_0; y_0) \cdot h$$

2. Подставляя значения x_1, y_1 в правую часть уравнения (I), вычисляем угловой коэффициент $K_1 = y' = f(x_1; y_1)$ касательной, проведенной к интегральной кривой в точке $(x_1; y_1)$. Заменяя на отрезке $[x_1; x_2]$ интегральную кривую отрезком касательной, находим приближенное значение решения y_2 в точке x_2:

$$y_2 = y_1 + f(x_1; y_1) \cdot h .$$

3. Аналогично, находим:

$$y_3 = y_2 + f(x_2; y_2) \cdot h$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}; y_{i-1}) h \qquad (2)$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}; y_{n-1}) \cdot h$$

Таким образом, искомая интегральная кривая получится в виде ломаной, проходящей через точки $(x_i; y_i)$, причем значения y_i вычисляются по формуле (2). Эта формула и является <u>основной расчетной формулой метода Эйлера</u>.

Недостаток метода Эйлера заключается в том, что по мере удаления от начальной точки x_0 происходит накапливание погрешностей, т.е. вычисленные значения неизвестной функции все более уклоняются от истинных значений (см. пример). Для того, чтобы уменьшить погрешность, достаточно уменьшить шаг h, однако очень малый шаг требует значительного числа вычислений.

<u>Методика выполнения работы</u>

Все вычисления производятся на программируемом микрокалькуляторе "Электроника МК-56". При подготовке к лабораторной работе обязательно повторите порядок выполнения основных операций на микрокалькуляторе.

Рабочей формулой служит формула (2).

Определите величину h по формуле: $h = \frac{b - x_0}{n}$

В первую строку бланка занесите $x_0; y_0$. Вычислите $f(x_0; y_0)$.

Произведите вычисление y_1 по формуле (2) для $i = 1$. Результаты занесите во вторую строку расчетного бланка. По известным уже значениям x_1 и y_1 найдите $f(x_1; y_1)$. Занесите полученные значения в пятый и шестой столбцы расчетного бланка. По формуле (2), для $i = 2$ найдите y_2. Аналогичные вычисления проведите до получения значения y_n.

Расчетный бланк.

i	x_i	y_i	Промежуточные вычисления функции $f(x_i;y_i)$	$f(x_i;y_i)$	$f(x_i;y_i)\cdot h$	y_{i+1}
0	x_0	y_0		$f(x_0;y_0)$	$f(x_0;y_0)\cdot h$	y_1
1	x_1	y_1		$f(x_1;y_1)$	$f(x_1;y_1)\cdot h$	y_2
2	x_2	y_2		$f(x_2;y_2)$	$f(x_2;y_2)\cdot h$	y_3
3	x_3	y_3		$f(x_3;y_3)$	$f(x_3;y_3)\cdot h$	y_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		
n	x_n	y_n				

Закончив расчет, постройте ломаную линию – изображение приближенного частного решения данного дифференциального уравнения.

Для этого в прямоугольной декартовой системе координат постройте точки $(x_0;y_0), (x_1;y_1), (x_2;y_2), \ldots, (x_n;y_n)$ и соедините их последовательно отрезками прямой.

Далее, попытайтесь найти точное частное решение данного дифференциального уравнения. Если это удастся сделать, оцените относительную погрешность значения y_{10}.

Отчетом по работе служит заполненный расчетный бланк (см. Приложение 5).

Для эффективного выполнения задания лабораторной работы попробуйте составить программу вычисления значений функции $f(x_i;y_i)$, а если это удастся, то и программу решения дифференциального уравнения методом Эйлера.

Для облегчения этой работы на рис. 3 приведена блок-схема метода Эйлера.

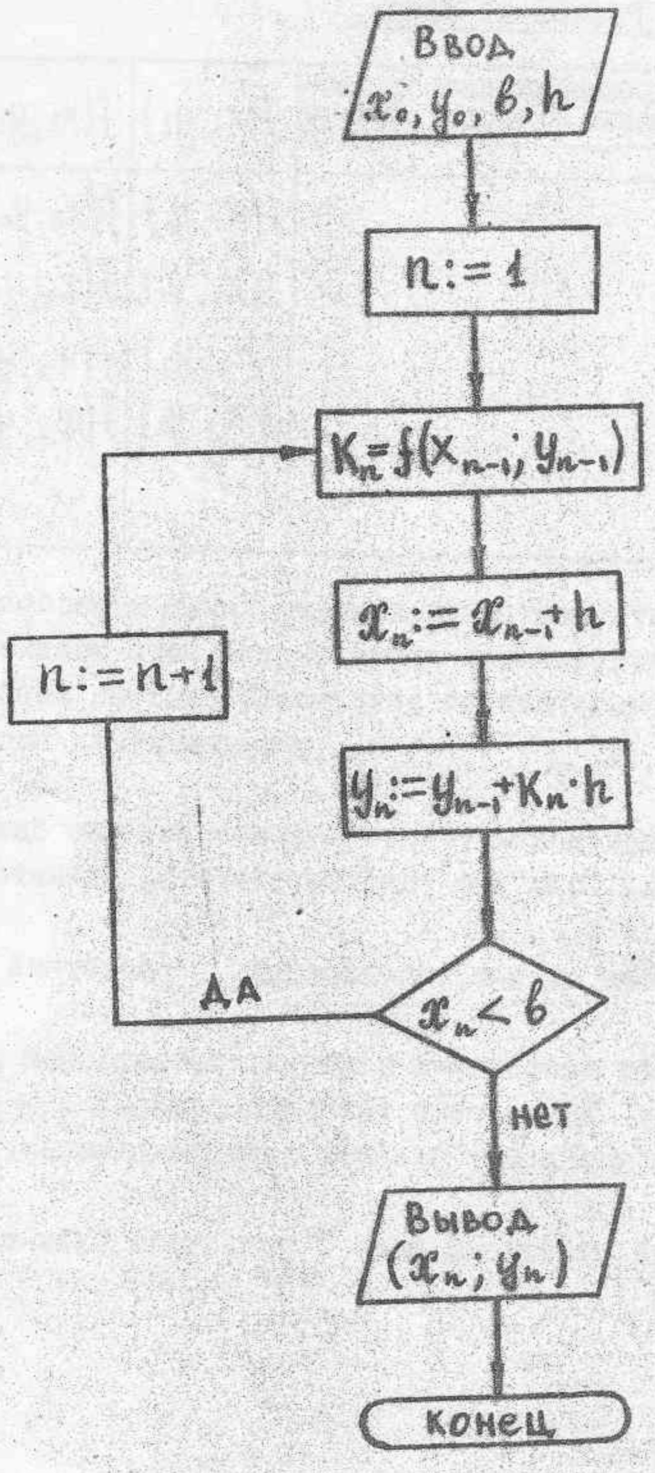
Ввод
x_0, y_0, b, h
$n := 1$
$K_n = f(x_{n-1}; y_{n-1})$
$x_n := x_{n-1} + h$
$y_n := y_{n-1} + K_n \cdot h$
$n := n+1$
$x_n < b$
ДА
нет
Вывод
$(x_n; y_n)$
конец

Рис. 3

ПРИМЕР: Методом Эйлера найти приближенное решение дифференциального уравнения $y'=2x(1+y^2)$, если $y\Big|_{x=0}=0$, на отрезке $[0;1]$. Отрезок разбить на 10 равных частей. Все вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака числа.

Значение $h=0,1$, $y_0=0$, $x_0=0$.

Результаты вычислений заносим в расчетный бланк:

i	x_i	y_i	Промежуточные вычисления $f(x_i;y_i)$		$f(x_i;y_i)$	$f(x_i;y_i)\cdot h$	y_{i+1}
			$2x_i$	$1+y_i^2$			
0	0	0	0	1	0	0	0
1	0,1	0	0,2	1	0,2	0,02	0,02
2	0,2	0,02	0,4	1,0004	0,4002	0,04	0,06
3	0,3	0,06	0,6	1,0036	0,6022	0,0602	0,1202
4	0,4	0,1202	0,8	1,0141	0,8115	0,0812	0,2014
5	0,5	0,2014	1	1,0406	1,0406	0,1041	0,3055
6	0,6	0,3055	1,2	1,0933	1,3120	0,1312	0,4367
7	0,7	0,4367	1,4	1,1907	1,6670	0,1667	0,6034
8	0,8	0,6034	1,6	1,3641	2,1826	0,2183	0,8217
9	0,9	0,8217	1,8	1,6752	3,0154	0,3015	1,1232
10	1,0	1,1232					

Данное дифференциальное уравнение имеет точное частное решение $y=tg\,x^2$. Тогда при $x=1$, $y=1,5574$. Таким образом, приближенное значение функции в точке $x=1$ отличается от точного значения в этой же точке на $\Delta=|1,1232-1,5574|=0,4342$. График точного и приближенного частного решения изображен на рис. 4.

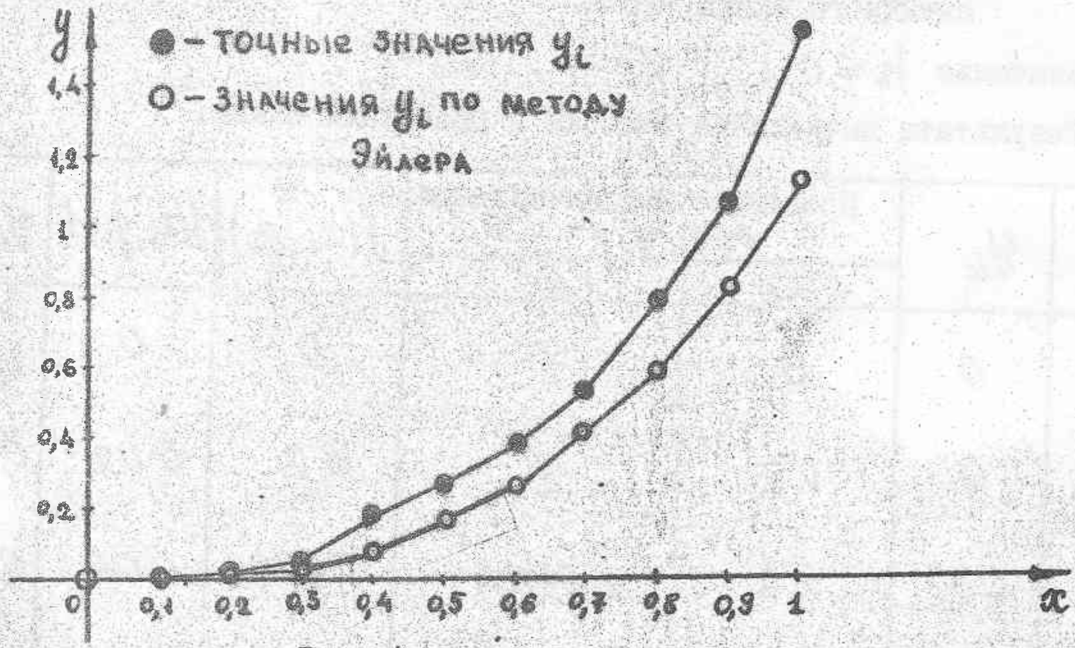

Рис. 4.

Контрольные вопросы

1. Каков геометрический смысл производной?
2. Какой вид имеет уравнение прямой линии, проходящей через точку с координатами $(x_0;y_0)$ с заданным угловым коэффициентом?
3. Записать уравнение касательной к кривой $y=f(x)$, проходящей через точку $(x_0;y_0)$.
4. Какое решение общее или частное дифференциального уравнения находится с помощью метода Эйлера?
5. Получите основную расчетную формулу метода Эйлера.
6. В чем недостаток метода Эйлера?