ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Приближенное вычисление определенных интегралов

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: Изучить методы приближенного вычисления определенных интегралов. Вычислить данный интеграл рассмотренными методами.

ЗАДАНИЕ: Вычислить данный определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методами прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Все вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака.

Краткие сведения из теории.

Приближенные методы вычисления определенных интегралов основаны на следующем: искомый определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ рассматривается как площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, по бокам прямыми $x=a$, $x=b$, снизу осью OX. Эту площадь можно найти приближенно. Рассмотрим несколько методов.

I. Метод прямоугольников и трапеций.

Разделим отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей. Длина каждого частичного отрезка равна $\frac{b-a}{n}$. Заменим данную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, состоящей из n прямоугольников с высотами, равными значениям функции $y=f(x)$ в начальных или конечных точках частичных интервалов (рис. I): $y_0; y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значение площади этой фигуры и даст приближенное значение $\int_a^b f(x)dx$.

Из обозначений на рис. I ясно, что

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot y_0 + \frac{b-a}{n}\cdot y_1 + \frac{b-a}{n}\cdot y_2 + \ldots + \frac{b-a}{n} y_{n-1} =$$

$$= \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}) \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot y_1 + \frac{b-a}{n}\cdot y_2 + \frac{b-a}{n}\cdot y_3 + \ldots + \frac{b-a}{n}\cdot y_n =$$

$$= \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n) \qquad (2)$$

формулы (I) , (2) называются формулами прямоугольников.

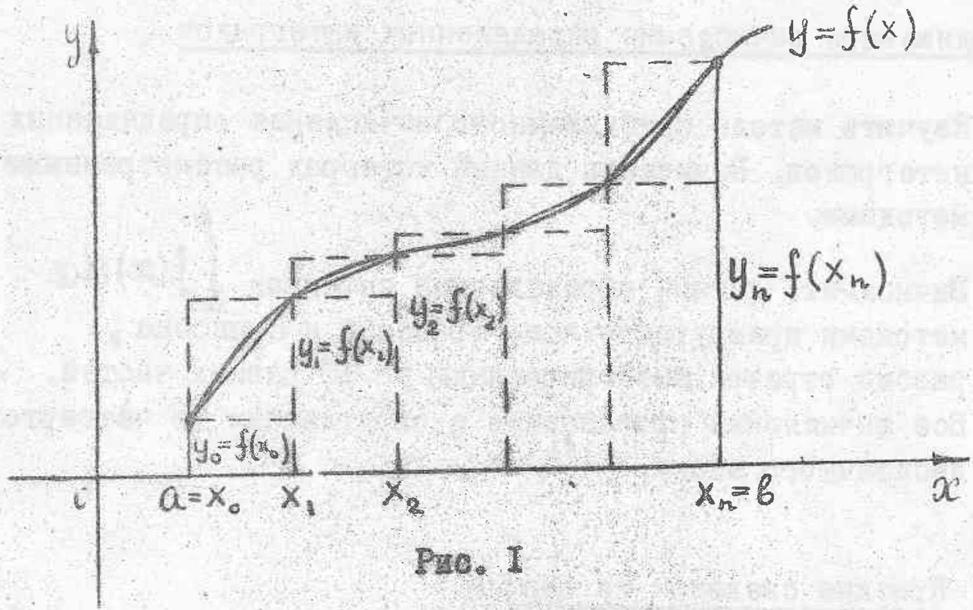

Рис. I

Оставим разбиение отрезка $[a;b]$ прежним. Заменим теперь каждую дугу линии $y=f(x)$, которая соответствует частичному отрезку, хордой, соединяющей конечные точки этой дуги. Получим n прямолинейных трапеций. Площадь криволинейной трапеции считаем приближенно равной сумме площадей n прямолинейных трапеций (рис. I)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{b-a}{n}\cdot\frac{y_{n-1}+y_n}{2}$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right).$$

Окончательно получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right). \qquad (3)$$

Формула (3) носит название формулы трапеций.

2. Метод Симпсона

Если известны значения функции $y_a=f(a)$, $y_b=f(b)$, $y_c=f(c)$, где c – средняя точка отрезка $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции можно найти приближенно по формуле Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(y_a+y_b+4y_c\right). \qquad (4)$$

Покажем, как получается эта формула.

Заменим криволинейную трапецию на три трапеции, построенные следующим образом. Делим отрезок $[a;b]$ пополам точкой $c=\frac{a+b}{2}$. В точке $E(c,f(c))$ проводим касательную к графику функции $y=f(x)$ (рис.

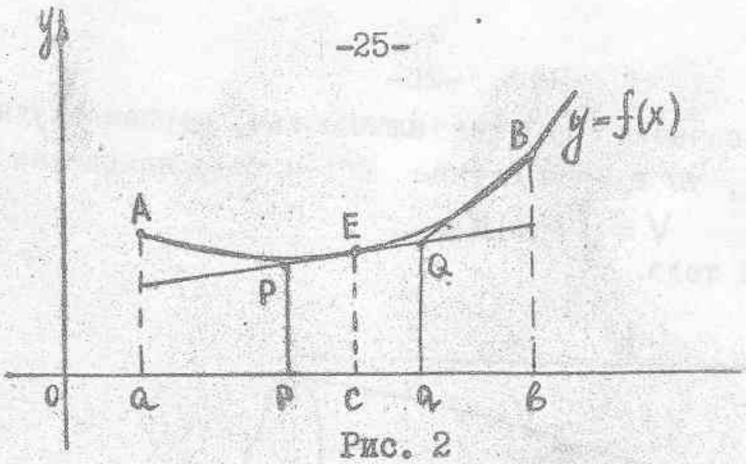

Рис. 2

Затем делим отрезок $[a;b]$ на три равные части точками p и q. Из этих точек восстановим перпендикуляры до пересечения с касательной в точках P и Q. Соединим точки AP и BQ. Рассмотрим три трапеции $aAPp$, $pPQq$, $qQBb$.

$$S_{aAPp}=\frac{aA+pP}{2}\cdot\frac{b-a}{3},\quad S_{pPQq}=\frac{pP+qQ}{2}\cdot\frac{b-a}{3},\quad S_{qQBb}=\frac{qQ+bB}{2}\cdot\frac{b-a}{3}$$

Найдем сумму площадей этих трапеций, которая приближенно равна площади криволинейной трапеции:

$$S_{\text{кр.тр.}}\approx\frac{b-a}{3}\left(\frac{aA+pP}{2}+\frac{pP+qQ}{2}+\frac{qQ+bB}{2}\right)=\frac{b-a}{3}\left(\frac{aA}{2}+\frac{pP}{2}+\frac{pP}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{qQ}{2}+\frac{qQ}{2}+\frac{bB}{2}\right)=\frac{b-a}{3}\left(\frac{aA}{2}+pP+qQ+\frac{bB}{2}\right)=$$
$$=\frac{b-a}{6}\cdot\left(aA+2(pP+qQ)+bB\right).$$

Обозначим: $aA=f(a)=y_a$, $bB=f(b)=y_b$,

$2(pP+qQ)=2\cdot2\cdot EC=4y_c$, так как средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований. Итак:

$$S_{\text{кр.тр.}}\approx\frac{b-a}{6}(y_a+4y_c+y_b),$$
$$\int_a^b f(x)\,dx=S_{\text{кр.тр.}}\approx\frac{b-a}{6}(y_a+4y_c+y_b).$$

Эта формула иногда называется формулой парабол. Она оказывается точной в том случае, если подинтегральная функция $f(x)$ есть многочлен ниже четвертой степени.

Формула (4) применяется для вычисления объемов тел. Если нам известна площадь сечения $F(x)$ тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс (рис. 3), то в этом случае объем тела находится по формуле:

$$V=\int_0^h F(x)\,dx,$$

где h - высота тела.

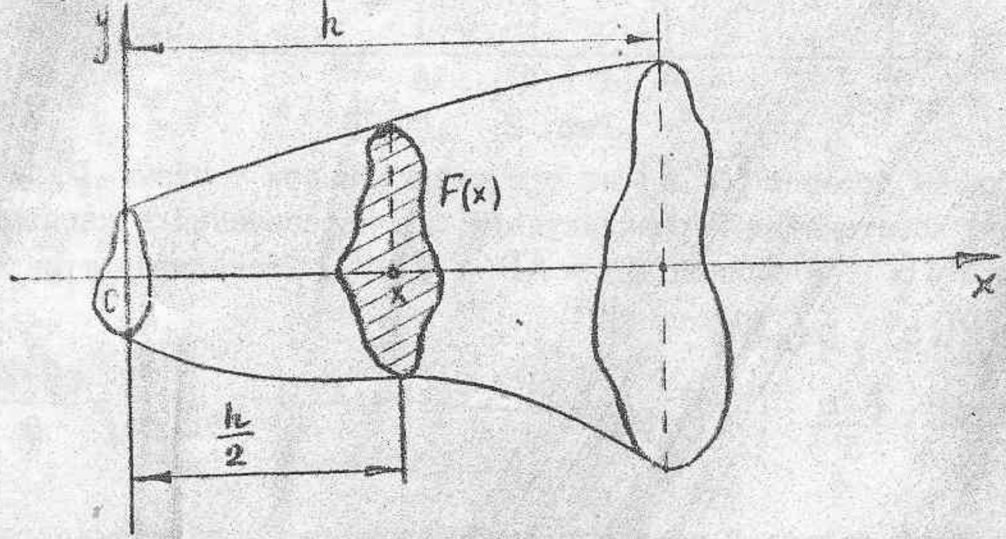

Рис.3.

Применяя к этому интегралу формулу Симпсона, найдем приближенно:

$$V\approx\frac{h}{6}\left(F_0+4F_{\frac{h}{2}}+F_h\right) \qquad (5)$$

Здесь F_0 - площадь нижнего основания тела,

F_h - площадь верхнего основания тела,

$F_{\frac{h}{2}}$ - площадь среднего сечения тела.

Применяя, например, формулу (5) к шару радиуса R (рис. 4.), получим:

$$V_{шара}=\frac{2R}{6}\left(0+4\pi R^2+0\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

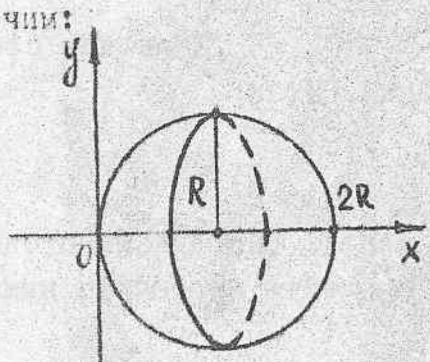

Рис. 4

Здесь $h=2R$, $F_0=0$,

$F_{2R}=0$, $F_R=\pi R^2$.

Формулой (5) часто пользуются на практике. Например, с помощью этой формулы определяется емкость камеры сгорания двигателя самолета.

Оценки погрешности вычислений.

Абсолютную погрешность r формул прямоугольников (I), (2) можно оценить по формуле

$$|r| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot M_1 ,$$

где $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$,т.е. максимальное значение первой производной на отрезке интегрирования $[a;b]$.

Абсолютная погрешность r результатов, полученных по формуле трапеций (3) находится по формуле

$$|r| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 ,$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$.

Погрешность значения интеграла, вычисленного по формуле трапеций, значительно меньше погрешности, допущенной при вычислении этого же интеграла по формуле прямоугольников. Погрешность вычислений по формулам прямоугольников приблизительно обратно пропорциональна числу n; при использовании формулы трапеций - числу n^2.

Методика выполнения работы.

I. Разбиваем отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей. Находим величину $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

2. Заполняем первый столбец расчетного бланка (рис.5)

3. Определяем наилучший способ вычисления подинтегральной функции (если необходимо, находим промежуточные значения). Для каждого значения x_i находим значение $y_i = f(x_i)$. Результаты заносим в последний столбец бланка.

4. По формулам (I), (2) определяем приближенное значение интеграла.

5. По формуле (3) также определяем значение интеграла.

6. Выбрав значения y_0, y_{10}, y_5 из расчетного бланка , по формуле (4) находим значение определенного интеграла.

7. Отчетом по работе служит расчетный бланк (см.Приложение 4).

ЗАМЕЧАНИЕ: В формулах(I), (2) ,(3) содержится одинаковая сумма:

$$S = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} .$$

Посчитайте эту сумму один раз и используйте полученный результат во всех трех формулах.

x_i	Промежуточные значения $f(x)$	y_i
$x_0 = a$		y_0
x_1		y_1
x_2		y_2
x_3		y_3
x_4		y_4
x_5		y_5
x_6		y_6
x_7		y_7
x_8		y_8
x_9		y_9
$x_{10} = b$		y_{10}

Рис. 5

Приведем в качестве примера блок-схему алгоритма метода прямоугольников (рис.6)

Алгоритм метода прямоугольников.

$$J=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+y_3+\dots+y_n) \qquad (2)$$

$y=f(x)$

$x_0=a$

$x_n=b$

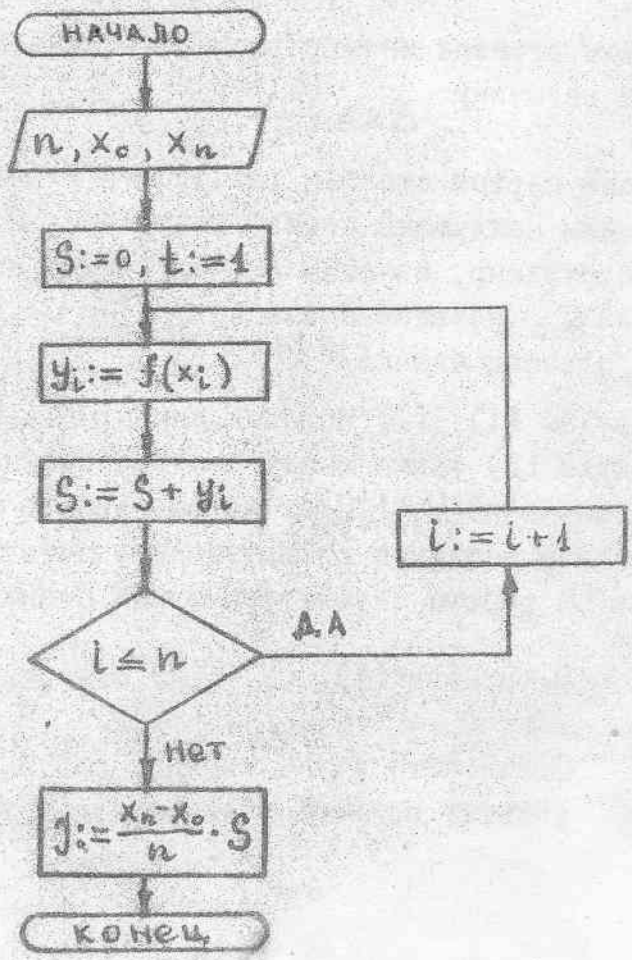

Рис. 6

ПРИМЕР:

Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$ методами прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. Все вычисления производить с округлением до четвертого десятичного знака.

1. Определяем $\Delta x = \frac{b-a}{10} = \frac{1-0}{10} = 0,1$

2. Вычисляем промежуточные значения функции $y=\sqrt{1+x^3}$, заносим их в последний столбец бланка.

x_i	Промежуточные значения			y_i
	x^3	$1+x^3$		
$x_0=0$	0	1		1
$x_1=0,1$	0,001	1,001		1,0005
$x_2=0,2$	0,008	1,008		1,0040
$x_3=0,3$	0,027	1,027		1,0134
$x_4=0,4$	0,064	1,064		1,0315
$x_5=0,5$	0,125	1,125		1,0607
$x_6=0,6$	0,216	1,216		1,1027
$x_7=0,7$	0,343	1,343		1,1589
$x_8=0,8$	0,512	1,512		1,2296
$x_9=0,9$	0,729	1,729		1,3149
$x_{10}=1$	1	2		1,4142

3. Найдем сумму
$$S=y_1+y_2+y_3+y_4+\ldots+y_9=9,9162$$

4. По формулам (I), (2) вычисляем приближенное значение интеграла
$$J \approx \Delta x(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_9)=0,1(y_0+S)=0,1(1+9,9162)=1,0916$$
$$J \approx \Delta x(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_{10})=0,1(S+y_n)=0,1(9,9162+1,4142)=1,1330$$

5. По формуле трапеций:
$$J \approx \Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_9\right)=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+S\right)=0,1\left(\frac{1+1,4142}{2}+9,9162\right)=$$
$$=0,1(1,2071+9,9162)=1,1123$$

6. По формуле Симпсона:
$$J \approx \frac{b-a}{6}(y_a+y_b+4y_c)=\frac{1-0}{6}(1+1,4142+4\cdot 1,0607)=\frac{1}{6}\cdot 6,657=1,1095$$

Оценим абсолютную погрешность результатов вычислений по формулам (I,2)

$$f(x)=\sqrt{1+x^3}\ ; \qquad f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\ ;$$

Можно показать, что функция $\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ будет монотонно возрастать на отрезке $[0;1]$. Значит максимальное значение производная имеет в точке $x=1$.

$$M_1 = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)| = \frac{3\cdot 1}{2\sqrt{1+1}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1{,}07$$

$$|r| \leq \frac{(b-a)^2}{2n}\cdot M_1 = \frac{(1-0)^2}{2\cdot 10}\cdot 1{,}07 = 0{,}05$$

$$|r| \leq 0{,}05$$

Погрешность при использовании формулы (3) приближенно можно считать пропорциональной $\frac{1}{n^2}$, т.е. $\sim 0{,}01$

Итак, по формуле прямоугольников (1) $J \approx 1{,}1$

по формуле прямоугольников (2) $J \approx 1{,}1$

по формуле трапеций $J \approx 1{,}11$

по формуле Симпсона $J \approx 1{,}11$

Контрольные вопросы.

1. В каких случаях применяются приближенные методы вычисления определенных интегралов?
2. Вывести формулы прямоугольников, Объяснить смысл всех букв в формулах.
3. Вывести формулу трапеций. Объяснить смысл всех букв.
4. Получить формулу Симпсона.
5. Что влияет на точность рассмотренных методов?