ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2.

Приближенное вычисление действительных корней уравнений.

Постановка задачи.

Из алгебры известно, как решить уравнение

$$f(x)=0,$$

если $f(x)$ - линейная или квадратичная функция. В вычислительной практике для функций более сложной природы обычно приходится прибегать к приближенному решению уравнения $f(x)=0$.

Задачу отыскания корней можно считать практически решенной, если мы сумеем определить корни с заданной степенью точности.

Цель данной работы сводится к уточнению корня уравнения с любой заданной точностью.

Замечание:

Число x называют приближенным значением корня c уравнения $f(x)=0$ с точностью до $\mathcal{E}$, если $|x-c|\leq\mathcal{E}$.

ЗАДАНИЕ: Требуется решить уравнение $f(x)=0$, если известно, что корень $c\in[a;b]$, методом проб, хорд и касательных.

Лабораторная работа рассчитана на два часа занятий с применением микрокалькулятора. По результатам работы оформляются расчетные бланки.

Краткие сведения из теории.

Метод проб.

Задано уравнение $f(x)=0$ и известно, что корень $c\in[a;b]$, геометрически это означает:

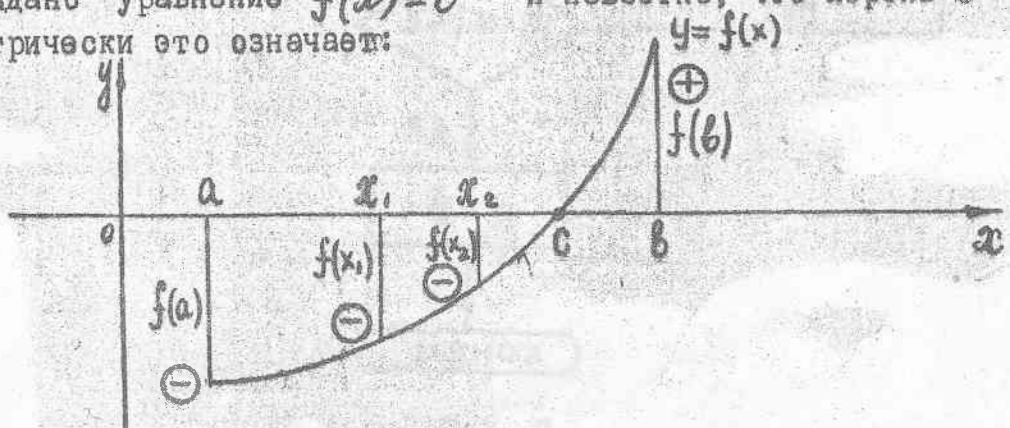


Рис. 1.

В качестве приближенного значения корня можно попробовать взять любое значение из $[a;b]$, например, середину отрезка.

$$x_1=\frac{a+b}{2}$$

Вычисляем $f(x_1)$ и определяем знак этого значения, он будет противоположен знаку одного из чисел $f(a)$ или $f(b)$, т.е. корень будет находиться или на $[a;x_1]$, или на $[x_1;b]$. Затем снова находим середину отрезка и определяем знак $f(x_2)$ и т.д.

Изложенный алгоритм нахождения корня изображен блок - схемой (рис. 2)

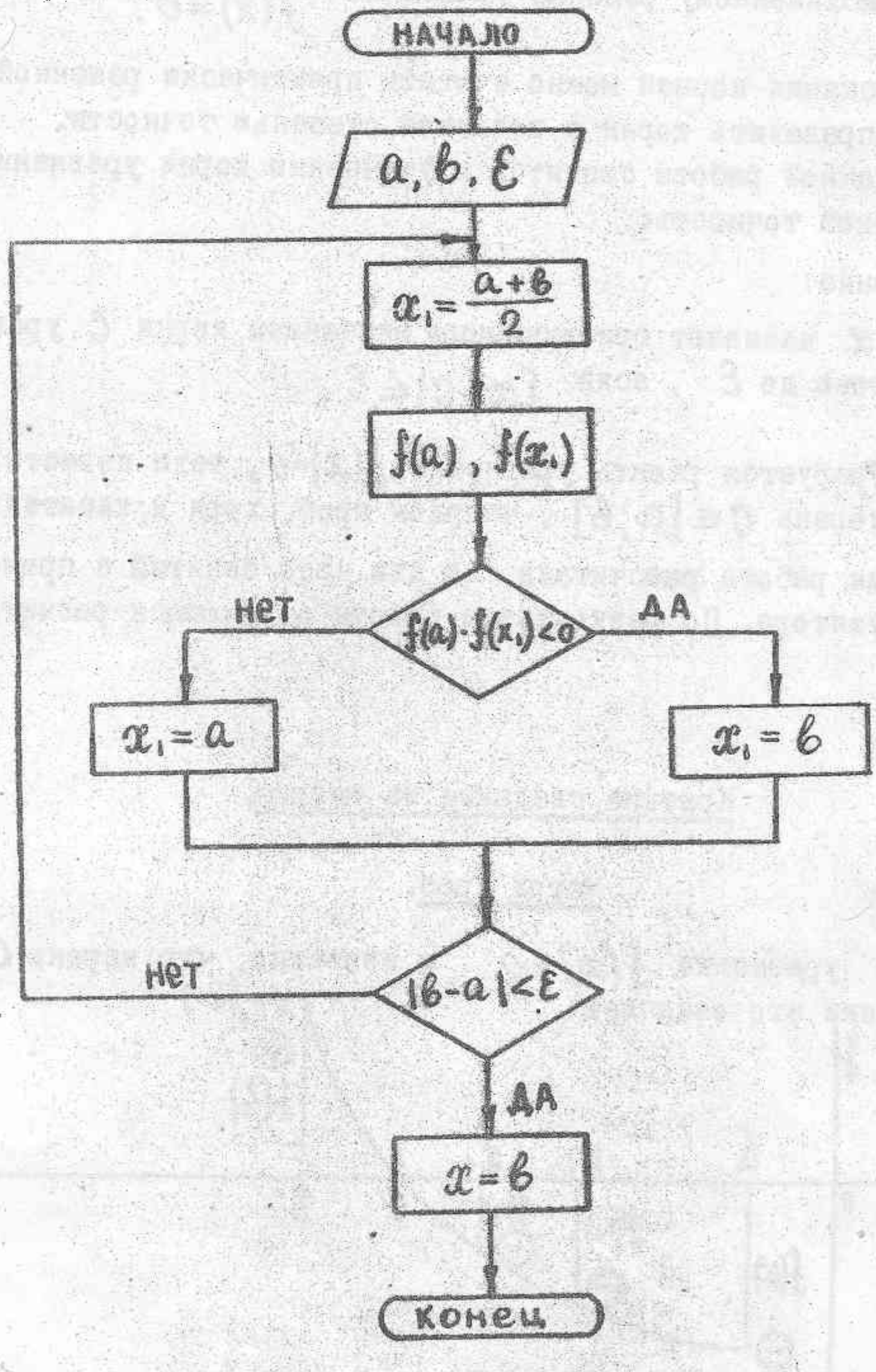


Рис. 2

ПРИМЕР I:

Методом проб найти корень уравнения $x^3+2x-7=0$ на $[1;2]$ с точностью до 0,0I.

Решение

Для удобства вычислений составим таблицу. Знаки "$-$" и "$+$" р индексах a_n и b_n означают, что $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$

$f(1)=-4<0$; $f(2)=5>0$

n	a_n^-	b_n^+	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$f(x_n)$
0	1	2	$\frac{1+2}{2}=1{,}5$	$f(1{,}5)=-0{,}625<0$
1	1,5	2	$\frac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$	$f(1{,}75)=1{,}859>0$
2	1,5	1,75	$\frac{1{,}5+1{,}75}{2}=1{,}625$	$f(1{,}625)=0{,}541>0$
3	1,5	1,625	$\frac{1{,}5+1{,}625}{2}=1{,}562$	$f(1{,}562)=-0{,}06<0$
4	1,562	1,625	$\frac{1{,}562+1{,}625}{2}=1{,}593$	$f(1{,}593)=0{,}233>0$
5	1,562	1,593	$\frac{1{,}562+1{,}593}{2}=1{,}577$	$f(1{,}577)=0{,}081>0$
6	1,562	1,577	$\frac{1{,}562+1{,}577}{2}=1{,}569$	$f(1{,}569)=0{,}005>0$
7	1,562	1,569	$\frac{1{,}562+1{,}569}{2}=1{,}567$	$f(1{,}567)=-0{,}019<0$
8	1,567	1,569		

Итак, корень уравнения $x\approx1{,}57$.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ.

Методы хорд и касательных применяются в сочетании друг с другом уточнение корня происходит быстрее.

Если $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то метод хорд дает приближения корня с недостатком, а метод касательных с избытком :(рис.3)

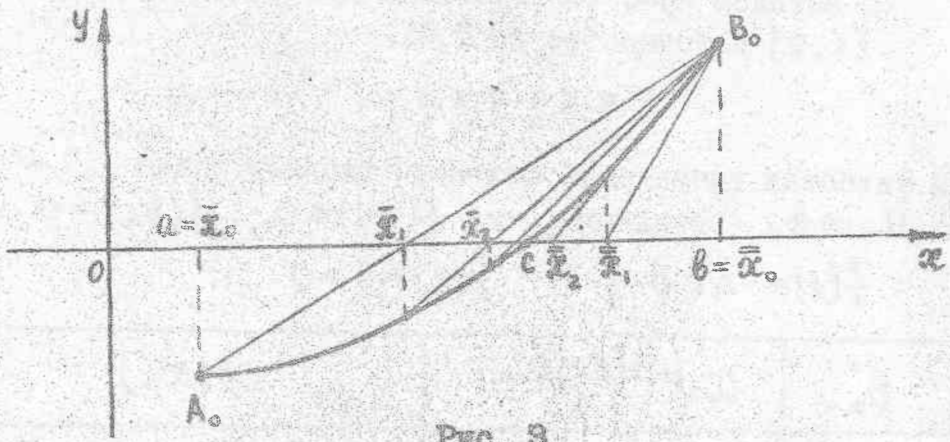


Рис. 3

Если же $f'(x)\cdot f''(x)<0$, то методом хорд получаем значения корня с избытком, а методом касательных – с недостатком (рис.4),

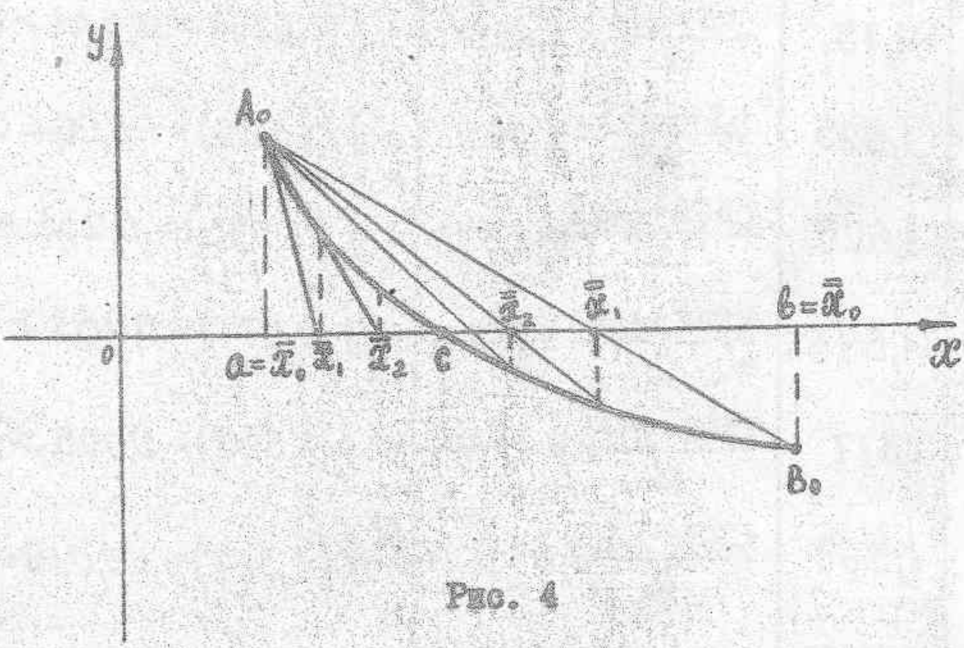


Рис. 4

где $\bar{x}_n$ – приближенное значение корня по недостатку,

$\bar{\bar{x}}_n$ – по избытку

$$c=\frac{\bar{x}_n+\bar{\bar{x}}_n}{2}$$

Итак, если $f'(x)\cdot f''(x)>0$, то в качестве начального приближения для метода хорд следует взять конец a_0, а для метода касательных-конец b_0:

$$a_n = a_{n-1} - f(a_{n-1}) \cdot \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}; \quad b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}$$

Если $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, то в качестве начального приближения для метода хорд следует взять конец b_0, а для метода касательных - конец a_0.

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}; \quad b_n = b_{n-1} - f(b_{n-1}) \cdot \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}$$

ПРИМЕР: Используя комбинированный метод хорд и касательных, найти приближенное значение корня уравнения

$x^3 + x^2 - 11 = 0$ на $[1;2]$

с точностью до 0,001.

Решение:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 11$$

$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 11 = -9 < 0$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 11 = 1 > 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x > 0 \quad \text{при} \quad x \in [1;2]$$

$$f''(x) = 6x + 2 > 0 \quad \text{при} \quad x \in [1;2]$$

Так как $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ на $[1;2]$, то в качестве начального значения для метода хорд надо взять $a_0 = 1$, а для метода касательных $b_0 = 2$

Заполним расчетный бланк:

n	Метод хорд	Метод касательных
0	$a_0 = 1$	$b_0 = 2$
1	$a_1 = a_0 - f(a_0) \cdot \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} =$	$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} =$
	$= 1 - (-9) \cdot \frac{2-1}{1-(-9)} =$	$= 2 - \frac{1}{3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2} =$
	$= 1 + 9 \cdot \frac{1}{10} = 1,9$	$= 2 - \frac{1}{16} \approx 1,94$

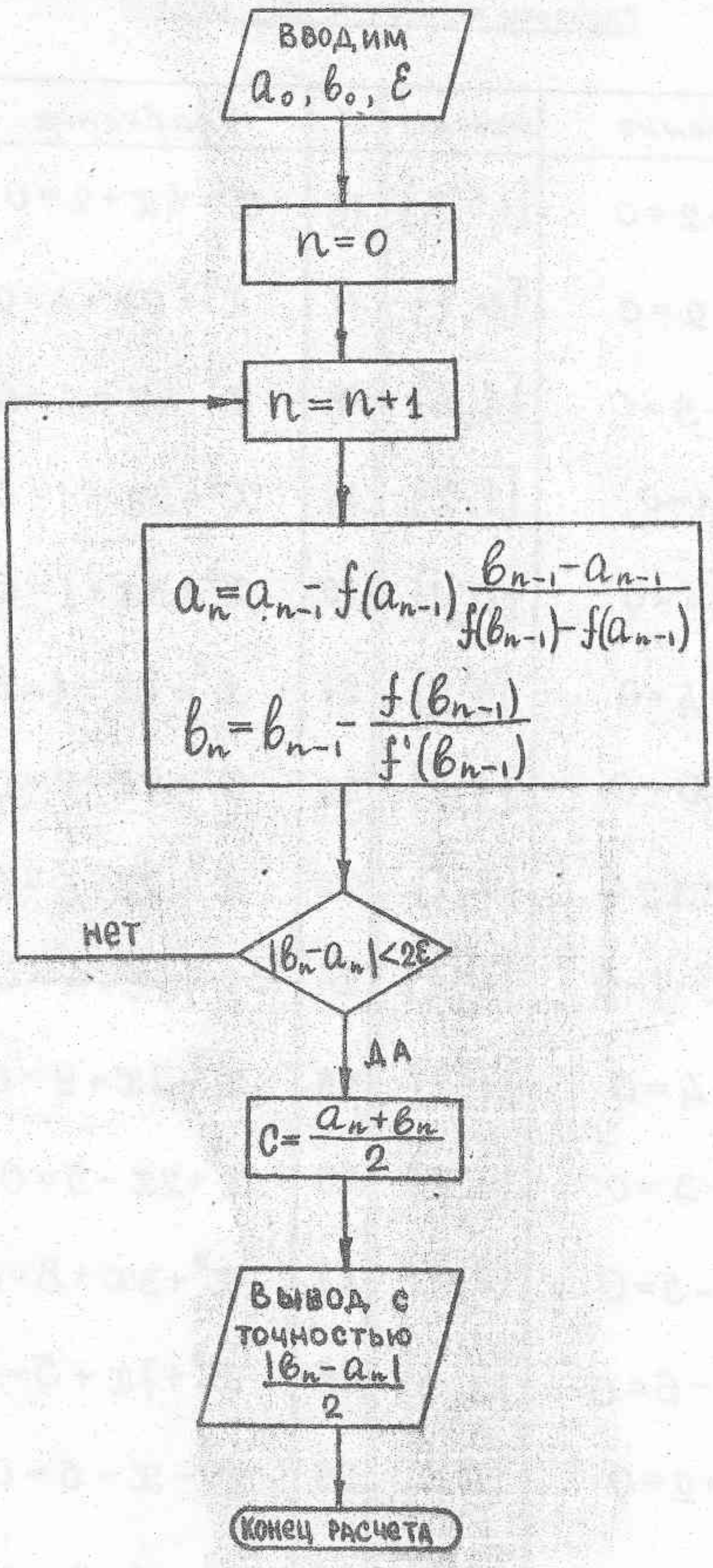
	Метод хорд	Метод касательных
2	$a_2 = a_1 - f(a_1)\cdot\dfrac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} = 1{,}9 - (1{,}9^3 + 1{,}9^2 - 11)\cdot\dfrac{1{,}94 - 1{,}9}{f(1{,}94) - f(1{,}9)} = 1{,}936$	$b_2 = b_1 - \dfrac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1{,}94 - \dfrac{f(1{,}94)}{f'(1{,}94)} = 1{,}94 - \dfrac{(1{,}94)^3 + (1{,}94)^2 - 11}{3\cdot(1{,}94)^2 + 2\cdot 1{,}94} = 1{,}936$

$$x = 1{,}936$$

Значение корня, вычисленное с точностью до 0,001, $x = 1{,}936$. Отчетом о выполнении лабораторной работы являются заполненные расчетные бланки. (См. Приложение 2.). Блок - схема расчета приводится на рис. 5.

Контрольные вопросы

1. Что значит решить уравнение $f(x)=0$, геометрический смысл?
2. Какие методы применяются для приближенного решения уравнений? В чем суть каждого метода? Какие преимущества и недостатки?
3. Перечислить последовательность операций в методе проб.
4. Опишите метод хорд, приведите основные расчетные формулы.
5. Опишите метод касательных, приведите основные расчетные формулы этого метода.
6. К какому из концов отрезка $[a;b]$ применяется метод касательных, метод хорд?
7. Как применить комбинированный метод хорд и касательных для решения уравнения?



вводим
a_0, b_0, ε
$n=0$
$n=n+1$
$a_n=a_{n-1}-f(a_{n-1})\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{f(b_{n-1})-f(a_{n-1})}$
$b_n=b_{n-1}-\frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}$
$|b_n-a_n|<2\varepsilon$
нет
да
$c=\frac{a_n+b_n}{2}$
вывод c
точностью
$\frac{|b_n-a_n|}{2}$
конец расчета

Рис. 5