ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № I.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Постановка задачи.

Одним из наиболее распространенных методов решения систем линейных уравнений с большим количеством неизвестных и с коэффициентами, выражаемыми многозначными числами, является метод последовательного исключения неизвестных. Он предложен немецким математиком Карлом Гауссом (I777-I855гг) и носит название метода Гаусса. Применение определителей вообще связано с очень громоздкими вычислениями, а метод Гаусса удобен тем, что легко допускает механизацию счета при помощи ЭВМ.

ЗАДАНИЕ: Решить систему линейных уравнений. Лабораторная работа рассчитана на два часа занятий с применением микрокалькулятора. По результатам работы оформляется расчетный бланк. Проверка решения производится путем его подстановки в исходное уравнение заданной системы. Эту подстановку целесообразно производить после округления полученного решения.

Краткие сведения из теории.

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=a_{14}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=a_{24}\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=a_{34}\end{cases}$$

Метод Гаусса решения систем уравнений состоит в следующем: при помощи элементарных преобразований данную систему приводят к виду:

$$(2)\begin{cases} x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3=b_{14}\\ x_2+c_{23}x_3=c_{24}\\ x_3=\dfrac{c_{34}}{c_{33}}\end{cases}$$

Эта система эквивалентна исходной. Уравнения этой системы позволяют последовательно найти x_3, x_2, x_1 по формулам:

$$(3)\begin{cases} x_3=\dfrac{c_{34}}{c_{33}}\\ x_2=c_{24}-c_{23}\cdot x_3\\ x_1=b_{14}-b_{13}\cdot x_3-b_{12}x_2\end{cases}$$

Описание схемы расчета. Схема Гаусса.

Для удобства вычисления производятся по схеме, называемой схемой единственного деления. Вычисления, приведшие нас к системе (2), называется прямым ходом, вычисление значений неизвестных (3) - обратным ходом, так как сначала определяется значение последнего неизвестного.

Схема единственного деления (схема Гаусса) составляется следующим образом.

В раздел I схемы (см. таблицу) записываются коэффициенты при неизвестных (в столбцах соответствующих неизвестных), свободные члены и для каждой строки " контрольные суммы" (σ_i), равные сумме элементов a_{ij} в данной строке (здесь $i=1,2,3; j=1,2,3$); последняя строка раздела I, состоящая из единицы и элементов b_{ij}, получается делением первой строки раздела на коэффициент a_{11}.

Элементы раздела II схемы равны соответствующим элементам раздела I минус произведение $a_{i1} b_{1j} (i,j \geq 2)$.

Последняя строка раздела II получается делением первой строки раздела на коэффициент при x_2. Аналогично вычисляются элементы III раздела.

Обратный ход начинается с вычисления последнего неизвестного системы линейных уравнений x_3 и заканчивается вычислением первого неизвестного x_1. При обратном ходе используются лишь строки прямого хода, содержащие единицы (назовем эти строки "отмеченными").

Элемент d_{34} последней "отмеченной" строки дает значение x_3. Далее, остальные неизвестные x_2, x_1 находятся вычитанием из свободного члена "отмеченной" строки суммы произведений ее коэффициентов на соответствующие значения ранее найденных неизвестных. Значения неизвестных последовательно выписываются в IV раздел. Для контроля вычислений используются контрольные суммы, помещенные в последнем столбце.

Над контрольными суммами проделываются те же операции, что и над остальными элементами строки, при отсутствии ошибок полученное значение в контрольной сумме должно быть равно сумме элементов соответствующей строки. Для контроля обратного хода находится x_3^* в последней отмеченной строке столбца контрольных сумм $d_{35}=x_3^*=x_3+1$, а остальные неизвестные этого столбца x_2^*, x_1^*, подсчитываются в тех же строках и по тем же формулам, что и неизвестные x_2, x_1, только в формулы подставляются соответствующие x_3^*, x_2^*. В итоге числа x_1^*, x_2^*, x_3^* должны совпадать с числами:

$$x_1^* = x_1 + 1$$

$$x_2^* = x_2 + 1$$

$$x_3^* = x_3 + 1$$

[illegible]	x_1	x_2	x_3	Свободные члены	Контрольные суммы
I	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	$\sigma_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	$\sigma_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24}$
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	$\sigma_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}$
→	$1 = \frac{a_{11}}{a_{11}}$	$b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14} = \frac{a_{14}}{a_{11}}$	$b_{15} = \frac{\sigma_1}{a_{11}}$
II		$b_{22} = a_{22} - a_{21} \cdot b_{12}$	$b_{23} = a_{23} - a_{21} \cdot b_{13}$	$b_{24} = a_{24} - a_{21} \cdot b_{14}$	$b_{25} = \sigma_2 - a_{21} \cdot b_{15}$
		$b_{32} = a_{32} - a_{31} \cdot b_{12}$	$b_{33} = a_{33} - a_{31} \cdot b_{13}$	$b_{34} = a_{34} - a_{31} \cdot b_{14}$	$b_{35} = \sigma_3 - a_{31} \cdot b_{15}$
→		$1 = \frac{b_{22}}{b_{22}}$	$c_{23} = \frac{b_{23}}{b_{22}}$	$c_{24} = \frac{b_{24}}{b_{22}}$	$c_{25} = \frac{b_{25}}{b_{22}}$
III			$c_{33} = b_{33} - b_{32} \cdot c_{23}$	$c_{34} = b_{34} - b_{32} \cdot c_{24}$	$c_{35} = b_{35} - b_{32} \cdot c_{25}$
→			$1 = \frac{c_{33}}{c_{33}}$	$d_{34} = \frac{c_{34}}{c_{33}}$	$d_{35} = \frac{c_{35}}{c_{33}}$
IV				$x_3 = d_{34}$	$x_3^* = d_{35} = 1 + x_3$
				$x_2 = c_{24} - c_{23} \cdot x_3$	$x_2^* = c_{25} - c_{23} \cdot x_3^* = 1 + x_2$
←				$x_1 = b_{14} - b_{13} x_3 - b_{12} x_2$	$x_1^* = b_{15} - b_{13} x_3^* - b_{12} \cdot x_2^* = 1 + x_1$

ПРИМЕР: Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$$

Разделы	x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	Контрольные суммы
I	$\boxed{2}$	2	-1	1	4	8
	4	3	-1	2	6	14
	8	5	-3	4	12	26
	3	3	-2	2	6	12
→	1	1	-0,5	0,5	2	4
II		$\boxed{-1}$	1	0	-2	-2
		-3	1	0	-4	-6
		0	-0,5	0,5	0	0
→		1	-1	0	2	2
III			$\boxed{-2}$	0	2	0
			-0,5	0,5	0	0
→			1	0	-1	0
IV				$\boxed{0,5}$	-0,5	0
→				1	-1	0
V				1	$x_4=-1$	$x_4^*=0$
			1		$x_3=-1$	$x_3^*=0$
		1			$x_2=1$	$x_2^*=2$
←	1				$x_1=1$	$x_1^*=2$

В раздел I таблицы вписываем матрицу системы, ее свободные члены и контрольные суммы. Затем подсчитываем "отмеченную" строку этого раздела, разделив первую строку на $a_{11}=2$. Элементы раздела П вычисляем по следующему правилу: каждый элемент этого раздела равен соответствующему элементу раздела I минус произведение первого элемента его строки на элемент "отмеченной" строки в его столбце. Полученный результат записываем на соответствующее место в разделе П. Например: $b_{23}=a_{33}-a_{21}b_{13}=-1-4(-0,5)=1$

$$b_{33}=a_{33}-a_{31}b_{13}=-3-8(-0,5)=1$$

Элементы "отмеченной" строки раздела П получим, разделив его первую строку на ее первый коэффициент.

Аналогично вычисляются элементы Ш и IУ разделов.

Для нахождения неизвестных используем "отмеченные" строки, начиная с последней. Неизвестное X_4 представляет собой свободный член последней "отмеченной" строки: $x_4=-1$, а остальные неизвестные x_3, x_2 и x_1 получаются последовательно в результате вычитания из свободных членов "отмеченных" строк суммы произведений соответствующих коэффициентов на ранее найденные значения неизвестных.

Над столбцом контрольных сумм производятся те же действия, что и над остальными столбцами, и в итоге сумма элементов каждой строки схемы должна быть равна элементу этой строки, стоящему в контрольной сумме. Число x_i^* из столбца контрольных сумм должно быть равно числам x_i+1.

В результате получим $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=-1$.

Проверкой убеждаемся в правильности найденных решений. Отчетом о выполнении лабораторной работы является заполненный расчетный бланк (см. Приложение I).

Контрольные вопросы

I. В чем суть метода Гаусса?
2. Как заполнить первый раздел схемы Гаусса?
3. Как получить элементы отмеченных строк?
4. Как получить элементы II и III разделов?
5. Для чего нужен обратный ход в методе Гаусса?
6. Для чего служит контрольная сумма и как проводить проверку вычислений с помощью контрольной суммы?