Решение типовых задач

Теоремы сложения и умножения вероятностей

1) В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны последовательно достают два шара. Найти вероятность того, что:

а) шары будут одинакового цвета (шары возвращают в урну);

б) шары будут разных цветов (шары не возвращают в урну);

в) хотя бы один шар будет черным (шары не возвращают в урну).

Решение

а) Событие A – шары одинакового цвета.

Рассмотрим события:

A_1 = бб – первый шар белый и второй шар белый.

Аналогично:

A_2 = чч – первый шар черный и второй шар черный.

Событие A произойдет, если достанут 2 белых или 2 черных шара:

$$A = A_1 + A_2.$$

$P(A_1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{1}{9}$ – вероятность достать второй раз белый шар не изменилась, так как шар вернули в урну. Аналогично:

$P(A_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{15} = \frac{4}{9}$

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий A_1 и A_2:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

б) Событие B – шары разных цветов.

Рассмотрим события:

B_1 = бч; B_2 = чб.

Ясно, что $B = B_1 + B_2$;

$P(B_1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$ – первый шар в урну не вернули, поэтому вероятность $\frac{10}{14}$ вычислена при условии, что первым достали белый шар.

$$P(B_2) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}.$$

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{5}{21} + \frac{5}{21} = \frac{10}{21}.$$

в) Событие C – хотя бы один шар черный.

Противоположное событие:

$\overline{C}$ – оба шара белых: $\overline{C} =$ бб.

$P(\overline{C}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$ первый шар не вернули в урну, поэтому вероятность $\frac{4}{14}$ вычислили при условии, что первым достали белый шар.

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}.$$

Ответ: а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{10}{21}$; в) $\frac{19}{21}$.

2) В урне 5 белых и 10 черных шаров. Из урны последовательно достают все шары. Найти вероятность того, что:

а) третьим по порядку будет вынут черный шар;

б) из первых трех шаров хотя бы один шар будет черный.

Решение

а) Событие A – третьим по порядку будет черный шар.

Рассмотрим события:

A_1 = ббч – первый шар белый, второй шар белый, третий шар черный.

Аналогично:

A_2 = бчч; A_3 = чбч; A_4 = ччч.

Событие A произойдет, если произойдет любое из событий A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Так как из урны последовательно достают все шары, то шары в урну не возвращают и при вычислении вероятности события A_1 = ббч рассчитываем условные вероятности того, что <u>второй шар белый</u> (при условии, что первый шар белый) и что <u>третий шар черный</u> (при условии, что первый шар белый и второй шар белый):

$$P(A_1) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{13} = \frac{20}{273}.$$

Аналогично:

$$P(A_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{273}.$$

$$P(A_3) = \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{273}.$$

$$P(A_4) = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{4}{13} = \frac{72}{273}.$$

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) =$$
$$= \frac{20}{273} + \frac{45}{273} + \frac{45}{273} + \frac{72}{273} = \frac{182}{273} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

б) Пусть событие B – из первых трех шаров хотя бы один шар будет черным.

Противоположное событие:

$\overline{B}$ – все три шара белые: $\overline{B} = ббб$.

$$P(\overline{B}) = \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2}{91}.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{91} = \frac{89}{91}.$$

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{89}{91}$.

3) В урне 5 белых, 10 черных и 5 красных шаров. Три из них вынимают наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными. Шары в урну не возвращают.

Решение

Событие A – по крайней мере два шара одноцветные.

Противоположное событие:

$\overline{A}$ – все шара разного цвета.

Рассмотрим события:

A_1 = бчк – первый шар белый, второй шар черный, третий шар красный.

Аналогично:

A_2 = бкч; A_3 = чбк; A_4 = чкб; A_5 = кбч; A_6 = кчб.

Событие A произойдет, если произойдет любое из событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6.$$

Так как шары в урну не возвращают, то при вычислении вероятности события A_1 = бчк рассчитываем условные вероятности того, что второй шар черный (при условии, что первый шар белый) и что третий шар красный (при условии, что первый шар белый и второй шар черный):

$$P(A_1) = \frac{5}{20} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{5}{18} = \frac{25}{684}.$$

Аналогично:

$$P(A_2) = \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{25}{684} = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6).$$

По теореме сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(\overline{A}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6) = 6 \cdot \frac{25}{684} = \frac{25}{114}.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{25}{114} = \frac{89}{114}.$$

Ответ: $\frac{89}{114}$.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

4) Имеются три одинаковые с виду урны: в первой 5 белых и 10 черных шаров; во второй 9 белых и 6 черных шаров; в третьей только черные шары. Из наугад выбранной урны достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный.

Решение

Событие A – достали черный шар. Событие A может произойти с одним из несовместных событий (гипотез):

H_1 – шар достали из первой урны;
H_2 – шар достали из второй урны;
H_3 – шар достали из третьей урны.

Так как урны с виду одинаковы, то:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

Найдем условные вероятности события A для каждой гипотезы.

Черный шар достали из первой урны:

$$P_{H_1}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};$$

Аналогично:

$$P_{H_2}(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5};$$

$$P_{H_3}(A) = 1.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 + 6 + 15}{15} = \frac{31}{45}.$$

Ответ: $\frac{31}{45}$.

5) Имеются две урны: в первой 5 белых и 10 черных шаров; во второй урне 9 белых и 6 черных шаров. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны достают один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет черным.

Решение

Событие A – из второй урны достали черный шар. Событие A может произойти с одним из несовместных событий (гипотез):

H_1 – из первой урны во вторую переложили белый шар;
H_2 – из первой урны во вторую переложили черный шар.

Вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}; \quad P(H_2) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Найдем условные вероятности события A. Если из первой урны во вторую переложили белый шар, то во второй урне стало 10 белых и 6 черных шаров. Значит, вероятность достать из нее черный шар равна:

$$P_{H_1}(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8};$$

Аналогично:

$$P_{H_2}(A) = \frac{7}{16}.$$

По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{16} = \frac{1}{8} + \frac{7}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}$.

6) Имеются три урны: в первой 5 белых и 10 черных шаров; во второй 9 белых и 6 черных шаров; в третьей урне 15 черных шаров (белых шаров нет). Из наугад выбранной урны достали один шар. Этот шар оказался черным. Найти вероятность того, что шар достали из второй урны.

Решение

Событие A – из наугад выбранной урны достали один шар.

Событие A может произойти с одним из несовместных событий (гипотез):

H_1 – шар достали из первой урны;

H_2 – шар достали из второй урны;

H_3 – шар достали из третьей урны.

Априорные вероятности гипотез равны:

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

В задаче 4 найдены условные вероятности события A и его полная вероятность:

$$P_{H_1}(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3};$$

$$P_{H_2}(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5};$$

$$P_{H_3}(A) = 1.$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{31}{45}.$$

Найдем по формуле Байеса апостериорную вероятность гипотезы H_2.

Черный шар достали из второй урны:

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

$$P_A(H_2) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right) : \frac{31}{45} = \frac{2}{15} \cdot \frac{45}{31} = \frac{6}{31}.$$

Сравним $P(H_2)$ и $P_A(H_2)$:

$$P(H_2) = \frac{1}{3} = \frac{31}{93}.$$
$$P_A(H_2) = \frac{6}{31} = \frac{18}{93}.$$

Таким образом, если известно, что достали черный шар, то вероятность того, что его достали из второй урны уменьшается (это соответствует условию – во второй урне меньше всего черных шаров).

Ответ: $\frac{6}{31}$.

Формула Бернулли

7) В семье шесть детей. Вероятность рождения девочки равна 0,49. Найти вероятность того, что среди этих детей одна девочка.

Решение

Событие A – родилась девочка.

$$P = P(A) = 0{,}49;$$
$$q = 1 - p = 1 - 0{,}49 = 0{,}51.$$

Формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \;\; C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Всего шесть детей, значит n=6.

Надо найти вероятность того, что среди них точно одна девочка, значит m = 1.

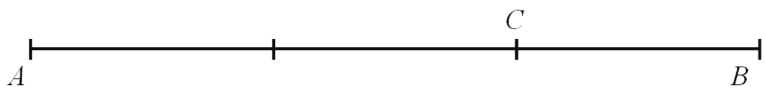
$$P_6(1) = C_6^1 p^1 q^{6-1},$$

$$P_6(1) = \frac{6!}{1!\,(6-1)!} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 = \frac{6!}{5!} \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 =$$
$$= 6 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}51^5 = 2{,}94 \cdot 0{,}0345 = 0{,}1014.$$

Ответ: 0,1014.

8) Отрезок AB разделен точной C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошено 6 точек. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения. Найти вероятность того, что более одной точки окажется правее точки C.

Решение



Событие A – случайная точка попала на отрезок CB (правее точки C).

Так как C делит AB в отношении 2:1, то:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{1}{2}.$$

Значит:

$$2CB=AC;$$

$$2CB+CB=AC+CB;$$

$$3CB=AB;$$

$$\frac{CB}{AB}=\frac{1}{3}.$$

Опираясь на геометрическое определение вероятности, получаем:

$$p=P(A)=\frac{CB}{AB}=\frac{1}{3};$$

$$q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

Формула Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},\ \ C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Всего на отрезок *AB* брошено 6 точек, значит $n = 6$.

Событие *B* – более одной точки окажется правее точки *C*.

Противоположное событие:

$\overline{B}$ – не более одной точки окажется правее точки *C*, то есть ни одной точки или ровно одна точка.

$$P(\overline{B})=P_6(0)+P_6(1),$$

$$P_6(0)=C_6^0\cdot p^0\cdot q^6=q^6=\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729},$$

$$P_6(1)=C_6^1\cdot p^1\cdot q^{6-1}=\frac{6!}{1!\,(6-1)!}\cdot p\cdot q^5=$$

$$=\frac{6!}{5!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=6\cdot\frac{2^{\,5}}{3^6}=\frac{9\cdot 32}{729}=\frac{192}{729}.$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{64}{729}+\frac{192}{729}\right)=1-\frac{256}{729}=\frac{473}{729}\approx 0{,}6488.$$

Ответ: 0,6488.

9) Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что не более 5 раз выпадет герб.

Решение

Событие *A* – при подбрасывании монеты выпадает герб.

$$p=P(A)=\frac{1}{2};$$

$$q=1-p=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Монета подбрасывается 6 раз, значит $n = 6$.
Событие B – герб выпадет не более 5 раз.
Противоположное событие:
$\overline{B}$ – герб выпадет более 5 раз, то есть 6 раз.

$$P(\overline{B}) = P_6(6) = C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^{6-6} = \frac{6!}{6!\,(6-6)!} \cdot p^6 \cdot q^0 =$$

$$= \frac{1}{0!} \cdot p^6 \cdot 1 = p^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

Ответ: $\frac{63}{64}$.

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

10) Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 200 независимых испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,3.

Решение

Число испытаний: $n = 200$.
Число появлений события A: $m = 70$.
Вероятность появления события A: $p = 0{,}3$, значит $q = 1 - p = 0{,}7$.
Величина $npq = 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 42$.

Так как $npq > 20$, то можно воспользоваться приближенным равенством из локальной теоремы Муавра-Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$x = \frac{70 - 200 \cdot 0{,}3}{\sqrt{42}} \approx \frac{70 - 60}{6{,}48} \approx 1{,}54.$$

По таблице значений функций Гаусса (приложение 1) находим:

$$\varphi(1{,}54) = 0{,}1219.$$

Тогда: $P_{200}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \varphi(1{,}54) = \frac{0{,}1219}{6{,}48} = 00188.$

Ответ: 00188.

11) Вероятность появления события A в каждом из 200 независимых испытаниях постоянна и равна 0,3. Найти вероятность того, что событие A появится не более 70 раз.

Решение

Число испытаний: $n = 200$.
Вероятность появления события A: $p = 0{,}3$, значит $q = 1 - p = 0{,}7$.

Величина npq = 200·0,3·0,7 = 42.

Так как $npq > 20$, то можно воспользоваться приближенным равенством из интегральной теоремы Муавра-Лапласа:

$$P_n(m_1;\ m_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где}$$

$$\Phi(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Необходимо найти вероятность того, что событие A появится не более 70 раз, а это значит, что число появлений события A принадлежит промежутку [0; 70], то есть $m_1 = 0$, $m_2 = 70$.

$$x' = \frac{0 - 200 \cdot 0{,}3}{\sqrt{42}} \approx -\frac{60}{6{,}48} \approx -9{,}26.$$

$$x'' = \frac{70 - 200 \cdot 0{,}3}{\sqrt{42}} \approx \frac{10}{6{,}48} \approx 1{,}54.$$

$$P_{200}(0;\ 70) \approx \Phi(1{,}54) - \Phi(-9{,}26) = \Phi(1{,}54) + \Phi(9{,}26).$$

По таблице значений функций Лапласа (приложение 2) находим:

$$\Phi(1{,}54) = 0{,}4382;\ \ \Phi(9{,}26) = 0{,}5.$$

$$P_{200}(0;\ 70) \approx 0{,}4382 + 0{,}5 = 0{,}9382.$$

Ответ: 0,9382.

12) Проведено 300 независимых испытаний с вероятностью появления события A в каждом из них 0,01. Найти вероятность того, что событие A появится точно 1 раз.

Решение

Число испытаний велико: $n = 300$.

Вероятность появления события A в каждом из них мала: $p = 0{,}01$.

Произведение $\lambda = np$ = 300·0,01 = 3 меньше 10, значит можно искомую вероятность найти по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Необходимо найти вероятность того, что событие A появится точно 1 раз, значит $m = 1$:

$$P_{300}(1) \approx \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3e^{-3} \approx 0{,}149.$$

Значение e^{-3} можно вычислить в MS Excel, если ввести в любую ячейку формулу =*Exp(–3)* и нажать Enter.

Ответ: 0.149.

Дискретные случайные величины

13) В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается четыре выигрыша по 5 тысяч рублей; пять выигрышей по 4 тысячи рублей и одиннадцать выигрышей по 1 тысячи рублей.

а) Составить ряд распределения случайной величины X – размер выигрыша по одному купленному билету.

б) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

в) Записать функцию распределения и построить ее график.

Решение

а) Случайная величина X – размер выигрыша по одному купленному билету.

Возможные значения случайной величины:

0; 1; 4; 5.

Вероятность выиграть 5 тысяч рублей по одному билету:

$$P(X=5)=\frac{4}{100}=0{,}04.$$

Аналогично определяются вероятности остальных значений случайной величины.

Ряд распределения имеет вид:

X	0	1	4	5
p	0,8	0,11	0,05	0,04

б) Найдем числовые характеристики случайной величины.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i.$$

$$M(X)=0\cdot 0{,}8+1\cdot 0{,}11+4\cdot 0{,}05+5\cdot 0{,}04=0{,}11+0{,}2+0{,}2=0{,}51.$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\big(x_i-M(X)\big)^2\cdot p_i.$$

$$D(X)=(0-0{,}51)^2\cdot 0{,}8+(1-0{,}51)^2\cdot 0{,}11+(4-0{,}51)^2\cdot 0{,}05+$$

$$+(5-0{,}51)^2\cdot 0{,}04=0{,}2601\cdot 0{,}8+0{,}2401\cdot 0{,}11+12{,}1801\cdot 0{,}05+$$

$$+20{,}1601\cdot 0{,}04=0{,}20808+0{,}026411+0{,}609005+0{,}806404=$$

$$=1{,}6499\approx 1{,}65.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}65}\approx 1{,}28.$$

в) Найдем функцию распределения случайной величины $F(x)$.

По определению: $F(x)=P(X<x)$.

1) Пусть $x = 0$, найдем $F(x)$:

$$F(0) = P(X < 0),$$

то есть вероятность того, что выигрыш по лотерейному билету будет меньше нуля, но это невозможное событие, значит $P(X < 0) = 0$ и $F(0) = 0$.

Очевидно, что для всех чисел из промежутка $(-\infty; 0]$ значение функции распределения будет таким же:

$$x \le 0: F(x) = 0.$$

2) Пусть $x = 1$, найдем $F(x)$:

$$F(1) = P(X < 1),$$

то есть вероятность того, что выигрыш по лотерейному билету будет меньше 1, т.е. выигрыш будет равен нулю:

$$F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}8.$$

Очевидно, что для всех чисел из промежутка $(0; 1]$ значение функции распределения будет таким же:

$$0 < x \le 1: F(x) = 0{,}8.$$

3) Пусть $x = 4$, найдем $F(x)$:

$$F(4) = P(X < 4),$$

то есть вероятность того, что выигрыш по лотерейному билету будет меньше 4, значит выигрыш равен нулю или равен 1 т.р.:

$$F(4) = P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8 + 0{,}11 = 0{,}91.$$

Очевидно, что для всех чисел из промежутка $(1; 4]$ значение функции распределения будет таким же:

$$1 < x \le 4: F(x) = 0{,}91.$$

4) Пусть $x = 5$, найдем $F(x)$:

$$F(5) = P(X < 5),$$

то есть вероятность того, что выигрыш по лотерейному билету будет меньше 5, значит равен нулю или 1 т.р. или 4 т.р.:

$$F(5) = P(X < 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 4) =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}11 + 0{,}05 = 0{,}96.$$

Очевидно, что для всех чисел из промежутка $(4; 5]$ значение функции распределения будет таким же:

$$4 < x \le 5: F(x) = 0{,}96.$$

5) Пусть $x > 5$, например, $x = 6$; найдем $F(x)$:

$$F(6) = P(X < 6),$$

то есть вероятность того, что выигрыш по лотерейному билету будет меньше 6, а это достоверное событие – в любом случае выигрыш будет меньше 6 т.р. (возможные значения 0; 1; 4; 5), поэтому:

$$F(6) = 1.$$

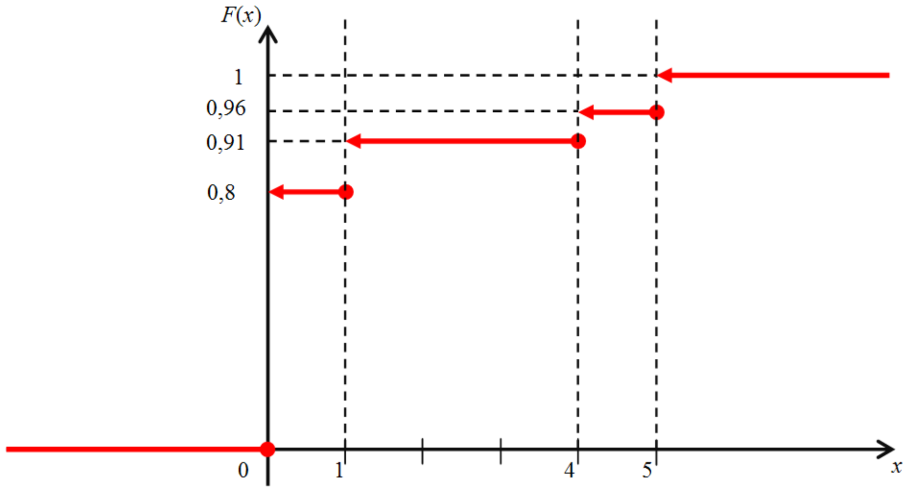
Очевидно, что для всех чисел больших 5, то есть из промежутка $(5; +\infty)$ значение функции распределения будет таким же:

$$x > 5: F(x) = 1.$$

Получаем:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0{,}8, & 0 < x \leq 1 \\ 0{,}91, & 1 < x \leq 4 \\ 0{,}96, & 4 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Построим ее график:



Ответ: $M(X) = 0{,}51$; $D(X) = 1{,}65$; $\sigma(X) = 1{,}28$.

Нормальный закон распределения

14) Полагая, что рост мужчин определенной возрастной группы есть нормально распределенная случайная величина X с параметрами $a = 173$ и $\sigma = 6$, найти долю костюмов 4-го роста (176 – 182 см), которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Решение

Доля костюмов 4-го роста (176 – 182 см) в общем объеме производства для данной возрастной группы определим по формуле:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \beta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Из условия следует, что $a = 173$, $\sigma = 6$, $\alpha = 176$, $\beta = 182$. Поэтому:

$$P(176 \leq X \leq 182) \approx \Phi\left(\frac{182 - 173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{176 - 173}{6}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{9}{6}\right) - \Phi\left(\frac{3}{6}\right) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5).$$

По таблице значений функции $\Phi(x)$ (см. приложение 2) определяем, что:

$$\Phi(1{,}5) = 0{,}433; \quad \Phi(0{,}5) = 0{,}1915.$$

Значит:

$$P(176 \leq X \leq 182) \approx 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417.$$

Ответ: $0{,}2417$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1926	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1947	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0043
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	,03289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,0126	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441
1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,499997
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,499999
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961		
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		